ANALISIS REAL
(BAHAN AJAR)

Oleh,

Dr. Usmadi, M.Pd.

PRODI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH SUMATERA BARAT
2020

BAB I

SIFAT-SIFAT ALJABAR BILANGAN REAL

A. Sifat - sifat Aljabar dalam $\mathbb{R}$

Pada himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$ terdapat dua operasi biner, dinotasikan "+" dan " $\cdot$ " yang disebut dengan penjumlahan (*addition*) dan perkalian (*multiplication*). Operasi biner tersebut memenuhi sifat - sifat berikut :

1) $a + b = b + a, untuk\ a, b\ \in \mathbb{R}$ (sifat komutatif penjumlahan)
2) $(a + b) + c = a + (b + c) untuk\ a, b\ , c\ \in \mathbb{R}$ (sifat assosiatif penjumlahan)
3) Terdapat $0 \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $0 + a = a\ dan\ a + 0 = a$ untuk semua $a \in \mathbb{R}$ (eksistensi elemen nol)
4) Untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ terdapat $-a \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $a + (-a) = 0\ dan\ (-a) + a = 0$ (eksistensi elemen negatif atau invers penjumlahan)
5) $a \cdot b = b \cdot a\ untu\ a, b \in \mathbb{R}$ (sifat komutatif penjumlahan)
6) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\ untuk\ a, b, c\ \in \mathbb{R}$ (sifat assosiatif perkalian)
7) Terdapat $1 \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $1 \cdot a = a\ dan\ a \cdot 1 = a$ untuk semua $a \in \mathbb{R}$ (eksistensi elemen unit 1)
8) Untuk setiap $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ terdapat $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1$ (eksistensi invers perkalian)
9) $a \cdot (\ b = c) = (a \cdot b) + (b \cdot c)\ dan\ (b + c) \cdot a =$ $(b \cdot a) + (c \cdot a) untuk\ a, b, c\ \in \mathbb{R}$ (sifat distribusi perkalian atas penjumlahan)

Teorema 1.1.1.

a) Jika $z, a \in \mathbb{R}$ dengan $z + a = a\ maka\ z = 0$
b) Jika $u\ dan\ b\ \neq 0\ \in \mathbb{R}$ dengan $u \cdot b = b\ , maka\ u = 1$
c) Jika $a \in \mathbb{R}$, maka $a \cdot 0 = 0$

Bukti :

a) Jika $z, a \in \mathbb{R}$ dengan $z + a = a\ maka\ z = 0$, menggunakan sifat 3,4 dan 2

   Diperoleh :

   $z = z + 0$

   $z = z + \big(a + (-a)\big)$

$z = (z + a) + (-a)$

$z = a + (-a)$

$z = 0$

b) Jika $u\ dan\ b\ \neq 0\ \in \mathbb{R}$ dengan $u \cdot b = b\ , maka\ u = 1$ menggunakan sifat 7,8, dan 6 , diperoleh :

$u = u \cdot 1$

$u = u \cdot \left(b \cdot \left(\frac{1}{b}\right)\right)$

$u = (u \cdot b) \cdot \left(\frac{1}{b}\right)$

$u = b \cdot \left(\frac{1}{b}\right)$

$u = 1$

c) Karena $a + a \cdot 0 = a \cdot 1 + a \cdot 0\ \ , a = (1 + 0), a = 1. maka\ a \cdot 0 = 0$

Dengan demikian maka semua teorema terbukti

Teorema 1.1.2. Jika $a \in \mathbb{R}$, maka :

a) Jika $a + b = 0\ , maka\ b = -a$

b) Jika $a \neq 0\ dan\ b \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $a \cdot b = 1, maka\ b = \frac{1}{a}$

c) Jika $a \cdot b = 0, maka\ a = 0\ atau\ b = 0$

Bukti :

a) Jika $a + b = 0\ , maka\ b = -a$ maka :

$a + b = 0\ \Leftrightarrow (-a) + (a + b) = (-a) + 0$

$a + b = 0\ \Leftrightarrow \big((-a) + a\big) + b = -a$

$a + b = 0\ \Leftrightarrow 0 + b = -a$

$a + b = 0\ \Leftrightarrow b = -a$

b) Jika $a \neq 0\ dan\ b \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $a \cdot b = 1, maka\ b = \frac{1}{a}$, maka :

$a \cdot b = 1\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}\right) \cdot\ (a \cdot b) = \left(\frac{1}{a}\right) 0$

$a \cdot b = 1\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} \cdot a\right)(b) = \frac{1}{a}$

$a \cdot b = 1\ \Leftrightarrow 1 \cdot b = \frac{1}{a}$

$a \cdot b = 1\ \Leftrightarrow b = \ \frac{1}{a}$

c) Jika $a \cdot b = 0, maka\ a = 0\ atau\ b = 0$, maka ;

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}\right) \cdot (a \cdot b) = \left(\frac{1}{a}\right) 0$$

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} \cdot a\right)(b) = 0$$

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot b = 0$$

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

Dengan demikian semua teorema terbukti.

Teorema tersebut di atas menjelaskan beberapa sifat aljabar sederhana dari sistem bilangan real.

Operasi pengurangan (*subtraction*) didefenisikan dengan $a - b = a + (-b)$untuk $a, b \in \mathbb{R}$. Sama halnya dengan operasi pembagian (*division*) , untuk $a, \in \mathbb{R}$ dengan $b \neq 0$ didefenisikan $\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right)$.

B. Bilangan Rasional dan Irasional

1. Bilangan Rasional

Telah diketahui bahwa himpunan $\mathbb{N}$ dan $\mathbb{Z}$ adalah subset dari $\mathbb{R}$. Elemen $\mathbb{R}$ yang dapat dituliskan dalam bentuk $\frac{b}{a}$ dimana $a, b \in \mathbb{Z}$ dan $a \neq 0$ disebut dengan bilangan rasional. Bilangan rasional disimbolkan dengan $\mathbb{Q}$.

2. Bilangan Irasional

Bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{b}{a}$.

Contohnya : $\sqrt{2}$

Akan ditunjukan bahwa tidak terdapat bilangan rasional yang kuadratnya adalah 2. Untuk membuktikannya digunakan istilah genap dan ganjil. Suatu bilangan asli disebut genap apabila bilangan itu mempunyai bentuk 2n untuk suatu $n \in \mathbb{N}$, dan disebut ganjil apabila bilangan itu mempunyai bentuk 2n - 1 untuk suatu $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.1.4. Tidak ada elemen $r \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga $r^2 = 2$.

Bukti :

Andaikan ada $r \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga $r^2 = 2$. Karena $r \in \mathbb{Q}$, maka r dapat dituliskan sebagai $\frac{p}{q}$ dengan p dan q tidak mempunyai faktor selain 1. Sehingga diperoleh $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ atau $p^2 = 2q^2$. Karena $2q^2$ genap, maka p^2 genap.

Karena p genap , maka $p = 2k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, sehingga $p^2 = (2k)^2 = 4k^2$. Dilain pihak diketahui $p^2 = 2q^2$ dan p genap, akibatnya q ganjil, sebab jika q genap maka faktor berserikat p dan q bukan 1. Jadi q haruslah ganjil , sehingga diperoleh $p^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2k^2 = q^2$ yang berarti q genap. Sehingga muncul kontradiksi bahwa q ganjil. Jadi, pengandaian salah , yang benar adalah tidak ada $r \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga $r^2 = 2$.

Latihan :

1. Jika $a, b \in \mathbb{R}$ tunjukan bahwa :

a) $-(a + b) = (-a) + (-b)$

b) $(-a)(-b) = ab$

c) $-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b}\ jika\ b \neq 0$

BAB II

SIFAT-SIFAT URUTAN BILANGAN REAL

A. Sifat sifat urutan pada $\mathbb{R}$

Sifat urutan menjelaskan tentang kepositifan (positivity) dan ketaksamaan (inequalities) diantara bilangan bilangan real. Ada subjek tak kosong ,yang disebut dengan **himpunan bilangan bilangan real positif tegas,** yang memenuhi sifat sifat berikut

(i) Jika Jika $a, b \in \mathbb{P}$, maka $a + b \in \mathbb{P}$.

(ii) Jika Jika $a, b \in \mathbb{P}$, maka $ab \in \mathbb{P}$.

(iii) Jika Jika $a \in \mathbb{P}$, maka memenuhi tepat pada suatu kondisi berikut:

$$a \in \mathbb{P} \qquad a = 0 \qquad -a \in \mathbb{P}$$

Sifat pertama dan kedua teorema diatas menjelaskan tentang sifat tertutup $\mathbb{P}$ terhadap operasi penjumlahan dan perkalian. Sifat yang ketiga (iii) sering disebut **sifat trikotomi** (trichotomy property), sebab akan membagi $\mathbb{R}$ kedalam tiga jenis elemen yang berbeda. Hal ini menjelaskan bahwa himpunan $\{-a: a \in \mathbb{P}\}$ dari bilanganreal negatif tidak mempunyai elemen yang sama dengan himpunan bilangan real positif. Lebih lanjut $\mathbb{R}$ merupakan gabungan tiga himpunan saling asing tersebut, yaitu

$$\mathbb{R} = \mathbb{P} \cup \{-a: a \in \mathbb{P}\} \cup \{0\}$$

Definisi 1.1.5

(i) Jika $a \in \mathbb{P}$, ditulis $a > 0$, artinya a adalah bilangan rieal **positif**

(ii) Jika $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$,ditulis $a \geq 0$, artinya a adalah bilangan real **nonnegatif**

(iii) Jika $-a \in \mathbb{P}$, ditulis $a < 0$, artinya adalah a bilangan real **negatif**

(iv) Jika $-a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$, ditulis $a \leq 0$, artinya a adalah bilangan real **nonpositif**

Definisi 1.1.6

(a) Jika $a - b \in \mathbb{P}$. Maka dituliskan $a > b$ atau $b < a$

(b) Jika $a - b \in \mathbb{P} \cup \{0\}$ Maka dituliskan $a \geq b$ atau $b \leq a$

sifat trikotomi diatas berakibatkan bahwa untuk $a, b \in \mathbb{R}$ memenuhi tepat satu kondisi berikut

$$a > b, \qquad a = b, \qquad a < b$$

Selanjutnya jika $a \leq b$ atau $b \leq a$ maka, $a = b$. Jika $a < b < c$ maka, artinya bahwa $a < b$ dan $b < c$

Teorema 1.1.7 diberikan sebarang $a, b, c \in \mathbb{R}$

(a) Jika $a > b$ dan $b > c$ maka $a > c$

(b) Jika $a > b$, maka $a + c > b + c$

(c) Jika $a > b$ dan $c > 0$, maka Jika $ca > cb$

Jika $a > b$ dan $c < 0$, maka Jika $ca < cb$

(d) Jika $a > b$, maka $\frac{1}{a} > 0$

Jika $a < b$, maka $\frac{1}{a} < 0$

Bukti

a) Diketahui Jika $a > b$ dan $b > c, a, b, c \in \mathbb{R}$, karena $a > b$,maka $a - b \in \mathbb{P}$, karena $b > b$, $b - c \in \mathbb{P}$. Menurut sifat urutan, maka $a + b \in \mathbb{P}$, sehingga diperoleh $(a - b) + (b - c) \in \mathbb{P} \Leftrightarrow a - b + c \in \mathbb{P}$

$$\Leftrightarrow (a - c) + (-b + b) \in \mathbb{P}$$
$$\Leftrightarrow (a - c) + 0 \in \mathbb{P}$$
$$\Leftrightarrow a - c \in \mathbb{P}$$
$$\Leftrightarrow a > c$$

b) Jika $a - b \in \mathbb{P}$, maka $(a + b) - (b - c) = a - b \in \mathbb{P}$, sehingga diperoleh bahwa $a + c > b + c$

c) Jika $a - b \in \mathbb{P}$,dan Jika $c \in \mathbb{P}$,maka Jika $ca - cb = c(a - b) \in \mathbb{P}$,akibatnya $ca > cb$ untuk $c > 0$. Gunakan langkah yang sama untuk $c < 0$

d) Cobalah sendiri

Oleh karena itu,dapat didilihat bahwa bilangan asli juga merupakan bilangan real positif. Sifat ini diperoleh dari sifat dasar urutan, berikut ini diberikan teoremanya

Teorema 1.1.8

(a) Jika $a \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$,maka $a^2 > 0$

(b) $1 > 0$

(c) Jika $n \in \mathbb{N}$, maka $n > 0$

Teorema 1.1.9 Jika $a, b \in \mathbb{R}$ dan Jika $a < b$, maka $a < \frac{a+b}{2} < b$

Bukti. Karena $a < b$, maka $a + a < a + b \Leftrightarrow 2a < a + b$, diperoleh $a < \frac{(a+b)}{2}$. Karena $a < b$, maka $a + b < b + b \Leftrightarrow a + b < 2b$, diperoleh $\frac{(a+b)}{2} < b$. Akibatnya, dari kedua pernyataan di atas diperoleh bahwa $a < \frac{(a+b)}{2} < b$.

Dapat di tunjukkan bahwa tidak ada bilangan real positif yang terkecil, sebab jika diberikan $a > 0$, dan karena $\frac{1}{2} > 0$, maka di peroleh

$$0 < \frac{1}{2}a > a$$

Selanjutnya, untuk membuktikan bahwa suatu himpunan $a \geq 0$ adalah sama dengan nol, maka harus ditunjukkan bahwa *a* selalu lebih kecil dari sebarang bilangan positif yang diberikan.

Teorema 1.1.10. *Jika* $a \in \mathbb{R}$ *sedemikian hingga* $0 \geq a < \varepsilon$ *untuk setiap* $\varepsilon > 0$, *maka* $a = 0$.

Bukti. Andaikan $a > 0$, maka $a > \frac{a}{2} > 0$. Diambil $\varepsilon_0 = \frac{a}{2}$ (ε_0 bilangan real positif tegas), maka $a > \varepsilon_0 > 0$. Kontraiksi dengan pernyataan $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$. Jadi, pengandaian salah, yang benar adalah $a = 0$.

Perkalian antara dua bilangan positif hasilnya adalah positif. Akan tetapi, hasil perkalian yang positif bellum tentu setiap faktornya positif.

Teorema 1.1.11.Jika $ab > 0$, ***maka berlaku***

(i) $a > 0$ ***dan*** $b > 0$, ***atau***

(ii) $a < 0$ ***dan*** $b < 0$.

Akibat 1.1.12.Jika $ab < 0$, ***maka berlaku***

(i) $a < 0$ dan $b < 0$, atau

(ii) $a > 0$ dan $b > 0$.

B. Ketaksamaan (*Inequalities*)

Selanjutnya, akan di tunjukkan bagaimana sifat urutan dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu ketaksamaan. Perhatikan contoh dibawah ini.

Contoh 1.1.13.

(a) Tentukan himpunan *A* dari bilangan real *x* sedimian hingga $2x + 3 \le 6$.

jawab: Diketahui $x \in A$ dan $2x + 3 \le 6$, maka

$2x + 3 \le 6 \Leftrightarrow 2x \le 3 \Leftrightarrow x \le \frac{3}{2}$. Jadi, $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x \le \frac{3}{2}\right\}$.

(b) Diberikan $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x > 2\}$. Tentukan bentuk lain dari *B*.

Jawab : Diketahui $x \in B$ dan $x^2 + x > 2$ atau $x^2 + x - 2 > 0$ atau $(x - 1)(x + 2) > 0$. Sehingga di peroleh (i) $x - 1 > 0$ dan $x + 2 > 0$, atau (ii) $x - 1 < 0$ dan $x + 2 < 0$. Untuk kasus (i) diperoleh bahwa $x > 1$ dan $x > -2$, yang berarti $x > 1$. Untuk kasus (ii) di peroleh bahwa $x < 1$ dan $x < -2$, yang berarti $x < -2$. Jadi, himpunannya adalah

$B = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x < -2\}$.

Teorema 1.1.14. *Jika* $a \ge 0$ *dan* $b \ge 0$, *maka*

(a) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2 \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

(b) $a \le b \Leftrightarrow a^2 \le b^2 \Leftrightarrow \sqrt{a} \le \sqrt{b}$

Teorema 1.1.15. Jika $x > -1$, maka $(i + x)'' \ge 1 + nx$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. **(Ketaksamaan Bernoulli)**

Bukti : akan dibuktikan menggunakan induksi

Untuk *n = 1*, maka $(1 + \mathrm{x})^1 \ge 1 + 1 \cdot \mathrm{x} \Leftrightarrow 1 + \mathrm{x} \ge 1 + \mathrm{x}$ (pertanyaan benar)

Misalkan benar untuk *n=k*, yaitu $(1 + \mathrm{x})^k \ge 1 + \mathrm{kx}$. Akan dibuktikan benar untuk *n=k+1*, yaitu

$$(1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k\,(1 + x) \ge (1 + kx)\,(1 + x)$$

$$= 1 + kx + x + kx^2$$

$$= 1\,(k + 1)\,x + kx^2$$

Karena $kx^2 \ge 0$, maka $(1 + x)^{k+1} \ge 1 + (k + 1)\,x$, yang berarti benar untuk *n = k+1.* Jadi, terbukti bahwa $(1 + \mathrm{x})^n \ge 1 + kn$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

1.1.16. Ketaksamaan Cauchy Jika $n \in \mathbb{N}$ dan $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_\mathrm{n}, \mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_\mathrm{n} \in \mathbb{R}$, maka

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

Atau

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right).$$

Selanjutnya , jika tidak semua $b_i = 0$ maka $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$ jika dan hanya jika terdapat $s \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $a_1 = sb_1, a_2 = sb_2, \ldots, a_n = sb_n$.

Bukti. Didefinisikan fungsi $\mathrm{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sebagai berikut :

$$F(t) = (a_1 - tb_1)^2 + (a_2 - tb_2)^2 + \ldots + (a_n - tb_n)^2,\ t \in \mathbb{R}.$$

Jelas bahwa $F(t) \ge 0$, untuk setiap $t \in \mathbb{R}$, selanjutnya,

$$F(t) = (a_1^2 - 2ta_1b_1 + t^2b_1^2) + (a_2^2 - 2ta_2b_2 + t^2b_2 + t^2b_2^2) + \ldots + (a_n^2 - 2ta_nb_n + t^2b_n^2)$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) - 2t\,(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n) + t^2\,(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) - 2t\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) + t^2\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Ingat bahwa $A + 2Bt + Ct^2 \geq 0$ jika dan hanya jika $(2B)^2 - 4AC \leq 0$, yang berakibat $B^2 \leq AC$. Sehingga diperolah bahwa

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} a_i).$$

Dengan demikian teorema terbukti.

Soal Latihan

1. Jika a,b$\in \mathbb{R}$, tunjukan bahwa:
   (a) –(a+b) = (-a) + (-b).
   (b) (-a)(-b)=ab.
   (c) –(a/b)=$\frac{-a}{b}$ jika b ≠ 0.
2. Selesaikan persamaan berikut .
   (a) 2x + 5 = 8.
   (b) $X^2 = 2x$
3. Jika a ≠ 0 dan b ≠ 0, tunjukan bahwa $\frac{1}{(ab)} = (\frac{1}{a})(\frac{1}{b})$.
4. Buktikan bahwa tidak ada bilangan rasional t sedemikian hingga $t^2 = 3$.
5. Buktikan bahwa jika a > 0, maka $\frac{1}{(1/a)}$ = a.
6. Jika a, b€ R , ditunjukan bahwa $a^2 + b^2 = 0$ jika dan hanya jika a =b =0.
7. Buktikan bahwa $[\frac{1}{2}(a+b)]^2 \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, untuk semua a, b $\in \mathbb{R}$.
8. Tunjukan bahwa jika a $\in \mathbb{R}$ dan m, n

BAB III

NILAI MUTLAK

A. Nilai Mutlak

Dari sifat Trikotomi, dapat ditarik kesimpulan bahwa jika $a \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$, maka a atau $-a$ merupakan bilangan real positif. Nilai mutlak dari $a \neq 0$ didefinisikan sebagai nilai positif dari dua bilangan tersebut.

Definisi 1.2.1

Nilai mutlak (absolute valua) dari suatu bilangan real a dinotasikan dengan $|a|$, didefinisikan sebagai

$$|a| = \begin{cases} a \; jika \; a > 0 \\ 0 \; jika \; a = 0 \\ -a \; jika \; a < 0 \end{cases}$$

Sehingga domain dari fungsi nilai mutlak adalah $\mathbb{R}$ dan rangenya adalah $P \cup \{0\}$.

Contohnya :

(a) $|3| = 3$ dan

(b) $|-9| = 9$.

(c) $|5| = 5$

(d) $|-8| = 8$

Dapat dilihat dari definisi di atas bahwa $|a| > 0$ untuk semua $a \in \mathbb{R}$, dan bahwa $|a| = 0$ jika dan hanya jika $a = 0$. Juga bahwa $|-a| = a$ untuk semua $a \in \mathbb{R}$.

Berikut ini diberikan beberapa sifat nilai mutlak :

Teorema 1.2.2

(a) $|a| = 0\ jika\ dan\ hanya\ jika\ a = 0$.

(b) $|-a| = a\ untuk\ semua\ a \in R$.

(c) $|ab| = |a||b|\ untuk\ semua\ a, b \in \mathbb{R}$.

(d) $|a|^2 = a^2\ untuk\ semua\ a \in \mathbb{R}$.

(e) $Jika\ c \geq 0, maka\ |a| \leq c\ jika\ dan\ hanya\ jika - c \leq a \leq c$.

(f) $-|a| \leq a \leq |a|\ untuk\ semua\ a \in \mathbb{R}$.

Bukti :

(a) Jika $a = 0$ maka $|a| = 0$. Jika $a \neq 0$ maka $-a \neq 0$ sehingga $|a| \neq 0$.

Oleh karena itu, jika $|a| = 0$, maka $a = 0$.

(b) Jika $a = 0$, maka $|0| = 0 = |-0|$. Jika $a > 0$, maka $-a < 0$ dan akibatnya

$$|a| = a = -(-a) = |-a|$$

Jika $a < 0$, maka $-a > 0$ dan akibatnya

$$|a| = -a = |-a|$$

(c) Jika $a = b = 0$, maka terbukti.

Jika $a > 0$ dan $b > 0$, maka $ab > 0$, sehingga $|ab| = ab = |a||b|$.

Jika $a > 0$ dan $b < 0$, maka $ab < 0$, sehingga $|ab| = -ab = a(-b) = |a||b|$.

(d) Karena $a^2 \geq 0$, maka $a^2 = |a^2| = |aa| = |a||a| = |a|^2$.

(e) Jika $|a| \leq c$, maka $a \leq c$ dan $-a \leq c$ yang berarti $-c \leq a \leq c$.

Sebaliknya, jika $-c \leq a \leq c$, maka diperoleh $a \leq c$ dan $-a \leq c$. Jadi $|a| \leq c$.

(f) Dengan mengambil $c = |a|$, maka :

Jika $a = |a|$, maka $a \leq |a|$ dan $-a \leq |a|$ yang berarti $-|a| \leq a \leq |a|$.

Berikut ini diberikan sebuah teorema yang disebut dengan Ketaksamaan Segitiga ($Trianglee\ Inequality$).

1.2.3 Ketaksamaan Segitiga

Jika $a, b \in R$, *maka* $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Bukti :

Dari Teorema 1.2.2 (f), diketahui $-|a| \leq a \leq |a|$ dan $-|b| \leq b \leq |b|$. Dengan menjumlahkan kedua ketaksamaan diperoleh

$= -|a| \leq a \leq |a| + -|b| \leq b \leq |b|$

$= -|a| + -|b| \leq a + b \leq |a| + |b|$

$= -(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$

Menggunakan Teorema 1.2.2 (e) diperoleh bahwa $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Akibat 1.2.4

Jika $a, b \in R$, *maka :*

(a) $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$

(b) $|a - b| \leq |a| + |b|$

Bukti :

(a) Tulis $a = a - b + b$ dan substitusikan ke dalam Ketaksamaan Segitiga. Sehingga $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$. Kurangkan kedua ruas dengan $|b|$, diperoleh $|a| - |b| \leq |a - b|$.

Langkah-langkahnya :

$a = a - b + b$

$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$ (kedua ruas dikurang dengan $|b|$)

$|a| - |b| = |(a - b) + b| - |b| \leq |a - b| + |b| - |b|$

$|a| - |b| = |a - b + b| - |b| \leq |a - b| + |b| - |b|$

$|a| - |b| = |a + 0| - |b| \leq |a - b| + |b| - |b|$

$|a| - |b| = |a| - |b| \leq |a - b| + |b| - |b|$

$|a| - |b| = 0 \leq |a - b| + 0$

$|a| - |b| - 0 \leq |a - b|$

$|a| - |b| \leq |a - b| \therefore Terbukti$

Gunakan cara yang sama untuk $b = b - a + a$ dan substitusikan ke dalam Ketaksamaan Segitiga. Sehingga diperoleh $|b| = |(b - a) + a| \leq |b - a| + |a|$. Kurangkan kedua ruas dengan $|a|$, diperoleh $-|a - b| \leq |a| - |b|$.

Langkah-langkahnya :

$b = b - a + a$

$|b| = |(b - a) + a| \leq |b - a| + |a|$ (kedua ruas dikurang dengan $|a|$)

$|b| - |a| = |(b - a) + a| - |a| \leq |b - a| + |a| - |a|$

$|b| - |a| = |b - a + a| - |a| \leq |b - a| + |a| - |a|$

$|0| - |0| = |b + 0| - |a| \leq |b - a| + |a| - |a|$

$0 = |b| - |a| \leq |b - a| - 0$

$\big|0 - |b - a|\big| \leq |b| - |a|$ $\qquad -|a - b| \leq |a| - |b| \therefore Terbukti$

Kombinasikan kedua ketaksamaan tersebut, diperoleh :

$$|a| - |b| \leq |a - b| = -|a - b| \leq |a| - |b|$$

Menggunakan Teorema 1.2.2 (e) diperoleh bahwa $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.

Jika $\big||a - b|\big| \leq 0$, maka $|a| - |b| \leq |a - b|$ dan $- ||a - b|| \leq |a - b|$ diperoleh $-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$. Sebaliknya, jika

$-|a-b| \leq |a|-|b| \leq |a-b|$, maka diperoleh $|a|-|b| \leq |a-b|$ dan $-||a-b|| \leq \; |a-b|$. Jadi, $||a-b|| \leq |a-b|$.

(b) Gantilah b pada Ketaksamaan Segitiga dengan $-b$, sehingga diperoleh $|a-b| \leq |a|+|-b|$. Karena $|-b| = b$, maka diperoleh bahwa $|a-b \leq |a|+|b||$.

Langkah-langkahnya :

$|a+b| \leq |a|+|b|$

$|a-b| = |a|+|-b|$

$|a-b \leq |a|+|b||$

Ketaksamaan segitiga diatas dapat diperluas sehingga berlaku untuk sebarang bilangan real yang banyaknya berhingga.

Akibat 1.2.5

Jika $a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah sebarang bilangan real, maka

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$$

Contoh 1.2.6

Diberikan fungsi f yang didefinisikan dengan $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{2x-1}$ untuk $x \in [2,3]$. Tentukan konstanta M sedemikian hingga $|f(x)| \leq M$, untuk setiap $x \in [2,3]$.

Diketahui $|f(x)| = \left|\frac{2x^2-3x+1}{2x-1}\right| = \frac{|2x^2-3x+1|}{|2x-1|}$,

$$\begin{aligned} |2x^2-3x+1| &\leq |2x^2|+|-3x|+|1| \\ &= 2|x^2|+3|x|+1 \\ &\leq 2|(3^2)|+3|(3)|+1 \\ &= 28 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} |2x-1| &\geq |2x|-|1| \\ &\geq \big||2(2)|-|1|\big| \\ &= 3 \end{aligned}$$

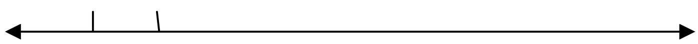
Sehingga $|f(x) =| = \left|\frac{2x^2-3x+1}{2x-1}\right| \leq \frac{28}{3}$

Jadi, dengan mengambil M = $\frac{28}{3}$, didapat $|f(x)| \leq M$, untuk setiap $x \in [2,3]$.

B. Garis Bilangan Real (The Real Line)

Interpetasi geometri yang dikenal di antaranya garis bilangan real (real time). Pada garis real, nilai mutlak $|a|$ dari suatu elemen $a \in R$ adalah jarak a ke 0. Secara umum, jarak (distance) antara elemen a dan b di R adalah $|a-b|$.

Perhatikan gambar berikut :



Definisi 1.2.6

Diberikan $a \in R$ dan $\varepsilon > 0$. Persekitaran-ε ($\varepsilon - neightborhood$) dari a didefinisikan sebagai himpunan

$$V\varepsilon(a) \coloneqq \{x \in R : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

Dapat dilihat bahwa $x \in V\varepsilon(a)$ jika dan hanya jika $a - \varepsilon, < x < a + \varepsilon$. Persekitaran juga sering disebut dengan **kitaran.**

Teorema 1.2.7

Diberikan $a \in R$*. Jika* x *berada dalam persekutuan* $V\varepsilon(a)$ *untuk setiap* $\varepsilon > 0$*, maka* $x = a$.

Bukti :

Jika x memenuhi $|x - a| < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka berdasarkan Teorema 1.1.10 diperoleh bahwa $|x - a| = 0$, yang berakibat $x = 0$.

BAB IV

SIFAT KELENGKAPAN BILANGAN REAL

A. Sifat Kelengkapan Bilangan Real

Bagian ini akan mendiskusikan sifat-sifat penting bilangan Real $\mathbb{R}$ yang sering disebut sebagai sifat Kelengkapan, karena sifat ini menjamin eksistensi elemen-elemen $\mathbb{R}$ bila hipotesis-hipotesis tertentu dipenuhi. Sistem bilangan rasional $\mathbb{Q}$ memenuhi sifat aljabar dan sifat urutan, tetapi telah diperlihatkan bahwa $\sqrt{2}$ tidak dapat dinyatakan sebagai bilangan rasional, oleh karena itu $\sqrt{2} \neq \mathbb{Q}$. Observasi ini memperlihatkan bahwa perlunya sifat tambahan untuk mengkarakteristikkan bilangan Real. Sifat tambahan ini, sifat kelengkapan (sifat supremum), adalah suatu sifat esensial dari $\mathbb{R}$.

Ada beberapa versi sifat kelengkapan. Disini, akan diberikan sifat yang paling efisien dengan mengasumsikan bahwa setiap himpunan terbatas tak kosong di R mempunyai supremum.

Supremum dan Infimum

Berikut ini diperkenalkan konsep tentang batas atas dan batas bawah dari suatu himpunan bilangan real.

Definisi 1.3.1. Diberikan subset tak kosong $S \subset \mathbb{R}$.

1 Himpunan S dikatakan **terbatas ke atas** (*bounded above*) jika terdapat suatu bilangan $u \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $s \leq u$ untuk semua $s \in S$. Setiap bilangan u seperti ini disebut dengan **batas atas** (*upper bound*) dari S.

2 Himpunan S dikatakan **terbatas ke bawah** (*bounded below*) jika terdapat suatu bilangan $w \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $w \leq s$ untuk semua $s \in S$. Setiap bilangan w seperti ini disebut dengan **batas bawah** (*lower bound*) dari S.

3 Suatu himpunan dikatakan **terbatas** (*bounded*) jika terbatas ke atas dan terbatas ke bawah. Jika tidak, maka dikatakan **tidak terbatas** (*unbounded*).

Sebagai contoh, himpunan $S := \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$ ini terbatas ke atas, sebab bilangan 2 dan sebarang bilangan lebih dari 2 merupakan batas atas dari S. Himpunan ini tidak mempunyai batas bawah, jadi himpunan ini tidak terbatas ke bawah. Jadi, S merupakan himpunan yang tidak terbatas.

Definisi 1.3.2. Diberikan S subset tak kosong $\mathbb{R}$.

a) Jika S terbatas ke atas, maka suatu bilangan u disebut **supremum** (batas atas terkecil) dari S jika memenuhi kondisi berikut:

1. u merupakan batas atas S, dan

2. jika v adalah sebarang batas atas S, maka $u \leq v$.

Ditulis $u = \sup S$.

b) Jika S terbatas ke bawah, maka suatu bilangan u disebut **infimum** (batas bawah terbesar) dari S jika memenuhi kondisi berikut:

1. w merupakan batas bawah S, dan
2. jika t adalah sebarang batas bawah S, maka $t \leq w$.

Ditulis $w = \inf S$.

Mudah untuk dilihat bahwa jika diberikan suatu himpunan S subset dari $\mathbb{R}$,maka hanya terdapat satu supremum, atau supremumnya tunggal. Juga dapat ditunjukkan bahwa jika u' adalah sebarang batas atas dari suatu himpunan tak kosong S, maka $\sup S \leq u'$, sebab $\sup S$ merupakan batas atas terkecil dari S. Suatu subset tak kosong $S \subset \mathbb{R}$ mempunyai empat kemungkinan, yaitu

1. mempunyai supremum dan infimum,
2. hanya mempunyai supremum,
3. hanya mempunyai infimum,
4. tidak mempunyai infimum dan supremum.

Setiap bilangan real $a \in \mathbb{R}$ merupakan batas atas dan sekaligus juga merupakan batas bawah himpunan kosong $\emptyset$. Jadi, himpunan $\emptyset$ tidak mempunyai supremum dan infimum.

Lemma 1.3.3. *Suatu bilangan u merupakan supremum dari subset tak kosong $S \subset$ jika dan hanya jika u memenuhi kondisi berikut:*

(1) *$s \leq u$ untuk semua $s \in S$,*

(2) *jika $v < u$, maka terdapat $s' S$ sedemikian hingga $x < s'$.*

Lemma 1.3.4. *Diberikan subset tak kosong $S \in \mathbb{R}$,*

(a) u = sup S jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $s_1 \in S$, sedemikian hingga $u - \varepsilon < s_1$.

(b) w = inf S jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $s_2 \in S$, sedemikian *hingga* $u - \varepsilon < s_2$.

Bukti.

(a) Diketahui $u = \sup S$ dan diberikan $\varepsilon > 0$. Karena $u - \varepsilon < u$, maka $u - \varepsilon$ bukan merupakan batas atas S. Oleh karena itu, terdapat $s_1 \in S$ yang lebih besar dari $u - \varepsilon$, sehingga $u - \varepsilon < s_1$.

Diketahui $u - \varepsilon < s_1$. Jika u merupakan batas atas S, dan jika memenuhi $v < u$, maka diambil $\varepsilon := u - v$. Maka jelas $\varepsilon > 0$, dan diperoleh bahwa $u = \sup S$.

Contoh 1.3.5.

(a) Jika suatu himpunan tak kosong S_1 mempunyai elemen sebanyak berhingga, maka dapat dilihat bahwa S_1 mempunyai elemen terbesar, namakan u, dan elemen terkecil, namakan w. Maka u = sup $S1$ dan w = inf S_1 , dan keduanya merupakan elemen S_1.

(b) Himpunan $S_2 := \{ x : 0 \leq x \leq 1 \}$ mempunyai batas atas 1. Akan dibuktikan bahwa 1 merupakan supremumnya. Jika $v < 1$, maka terdapat $s' \in S_2$ sedemikian hingga $v < s'$. Oleh karena itu, v bukan merupakan batas atas S_2 dan karena v merupakan sebarang $v < 1$, maka dapat disimpulkan bahwa sup $S_2 = 1$. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa inf $S_2 = 0$.

Sifat Kelengkapan $\mathbb{R}$

Akan ditunjukkan bahwa subset tak kosong $\mathbb{R}$ yang terbatas ke atas pasti mempunyai batas atas terkecil. Sifat seperti ini disebut Sifat Lengkap $\mathbb{R}$. Sifat Lengkap juga sering disebut dengan **Aksioma Supremum** $\mathbb{R}$.

1. 3.6. Sifat Kelengkapan $\mathbb{R}$ *Jika subset tak kosong* $S \subset \mathbb{R}$ *terbatas ke atas, maka supremumnya ada, yaitu terdapat* $u \in \mathbb{R}$ *sedemikian hingga* $u = \sup S$.

Akibat 1.3.7. *Jika subset tak kosong* $S \subset \mathbb{R}$ *terbatas ke bawah, maka infimumnya ada, yaitu terdapat* $w \in \mathbb{R}$ *sedemikian hingga* $w = \inf S$.

Bukti.

Misalkan himpunan T terbatas ke bawah, $T \subset \mathbb{R}$. Dibentuk himpunan $S = \{-t : t \in T\}$, maka S terbatas ke atas dan tidak kosong. Menurut Aksioma Supremum, sup S ada, namakan $u = \sup S$, maka $-u = \inf T$.

1.4. Penggunaan Sifat Aksioma Supremum

Teorema 1.4.1. *Diberikan subset tak kosong* $S \subset \mathbb{R}$ *yang terbatas ke atas dan sebarang* $a \in \mathbb{R}$. *Didefinisikan himpunan* $a + S := \{a + s : s \in S\}$, *maka berlaku* $\sup(a + S) = a + \sup(S)$.

Bukti.

Jika diberikan $u := \sup S$, maka $x \leq u$ untuk semua $x \in S$, sehingga $a + x \leq a + u$. Oleh karena itu, $a + u$ merupakan batas atas dari himpunan $a + S$. Akibatnya $\sup(a + S) \leq a + u$. Selanjutnya, misalkan v adalah sebarang batas atas $a + S$, maka $a + x \leq v$ untuk semua $x \in S$. Akibatnya $x \leq v - a$ untuk semua $x \in S$, sehingga $v - a$ merupakan batas atas S. Oleh karena itu, $u = \sup S \leq v - a$. Karena v adalah sebarang batas atas $a + S$, maka dengan mengganti v dengan $u = \sup S$, maka diperoleh $a + u$ £ Sup $(a + S)$. dilain pihak diketahui Sup $(a + S) \leq a + u$ .akibatnya terbukti bahwa $(a + S) = a + u$ = a + Sup S

Teorema 1.4.2. *Diberikan subset tak kosong* $S \subset \mathbb{R}$ *yang terbatas dan sebarang bilangan real* $a > 0$ *. Didefinisikan himpunan* $aS := \{as : s \in S\}$*, maka berlaku* $\inf(aS) = a \inf(S)$.

Bukti.

Tulis $u = \inf aS$ dan $v = \inf S$. Akan dibuktikan bahwa $u = av$. Karena $u = \inf aS$, maka $u \leq as$, untuk setiap $s \in S$. Karena $v = \inf S$, maka $v \leq s$ untuk setiap $s \in S$. Akibatnya $av \leq as$ untuk setiap $s \in S$. Berarti av merupakan batas bawah aS. Karena u batas bawah terbesar aS, maka $av \leq u$. Karena $u \leq as$ untuk setiap $s \in S$, maka diperoleh $\frac{u}{a} \leq$ s untuk setiap $s \in S$ (sebab $a > 0$). Karena $v = \inf S$, maka $\frac{u}{a} \leq$v yang berakibat $u \leq av$. Di lain pihak diketahui $av \leq u$. Akibatnya $u = av$. Jadi, terbukti bahwa $\inf(aS) = a \inf(S)$.

Teorema 1.4.3. *Jika A dan B subset tak kosong* $\mathbb{R}$ *dan memenuhi* $a \leq b$ *untuk semua* $a \in A$ *dan* $b \in B$ *, maka* $\sup A \leq \inf B$.

Bukti.

Diambil sebarang $b \in B$, maka $a \leq b$ untuk semua $a \in A$. Artinya bahwa b merupakan batas atas A, sehingga $\sup A \leq b$. Selanjutnya, karena berlaku untuk semua $b \in B$, maka $\sup A$ merupakan batas bawah B. Akibatnya diperoleh bahwa $\sup A \leq \inf B$.

Sifat Archimedes

Berikut ini diberikan salah satu sifat yang mengaitkan hubungan antara bilangan real dan bilangan asli. Sifat ini menyatakan bahwa apabila diberikan sebarang bilangan real x, maka selalu dapat ditemukan suatu bilangan asli n yang lebih besar dari x.

1.4.4. Sifat Archimedes. *Jika* $x \in \mathbb{R}$*, maka terdapat* $n \in \mathbb{N}$ *sedemikian hingga* $x < n$.

Bukti.

Ambil sebarang $x \in \mathbb{R}$. Andaikan tidak ada $n\hat{I}\mathbb{N}$ sedemikian hingga $x < n$, maka $n \leq x$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dengan kata lain, x merupakan batas atas $\mathbb{N}$. Jadi, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \neq \emptyset$, dan $\mathbb{N}$ terbatas ke atas. Menurut aksioma supremum, maka $\sup \mathbb{N}$ ada, tulis $u = \sup \mathbb{N}$. Karena $u - 1 < u$, maka terdapat $m \in \mathbb{N}$ dengan sifat $u - 1 < m$. Akibatnya $u < m+1$ dengan $m+1 \in \mathbb{N}$. Timbul kontradiksi dengan $u = \sup \mathbb{N}$. Berarti u batas atas $\mathbb{N}$, yaitu ada $m+1 \in \mathbb{N}$ sehingga $u < m+1$ (u bukan batas atas $\mathbb{N}$). Jadi, pengandaian salah, yang benar adalah ada $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $x < n$.

Akibat 1.4.5. *Jika* $S := \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}$ R, *maka* inf $S = 0$.

Bukti.

Karena $S \neq \emptyset$ terbatas ke bawah oleh 0, maka S mempunyau infimum, tulis $w :=$ inf S. Jelas bahwa $w \geq 0$. Untuk sebarang $\epsilon > 0$, menggunakan Sifat Archimedes, terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $\frac{1}{\varepsilon} <$ n , akibatnya $\frac{1}{n} <$ e . Oleh karena itu, diperoleh bahwa $0 < w < \frac{1}{n} < \epsilon$. Akan tetapi karena $\epsilon > 0$ sebarang, maka berdasarkan Teorema 1.1.10 berakibat bahwa $w = 0$. Terbukti bahwa inf $S = 0$.

Akibat 1.4.6. *Jika* $t > 0$ *, maka terdapat* $t\, n$ □ℕ *sedemikian hingga* $0 < \frac{1}{n_1} < 1$.

Bukti. Karena inf $\{ \frac{1}{n} : n$□ℕ $= 0$ dan $t > 0$, maka t bukan batas bawah himpunan $\{ \frac{1}{n} : n$□ℕ . Akibatnya terdapat n_1 □ℕ sedemikian hingga $0 < \frac{1}{n_1} < 1$.

Akibat 1.4.7. *Jika* $y > 0$*, maka terdapat* n_y □ℕ *sedemikian hingga* $n_y - 1 < y < n_y$.

Bukti. Sifat Archimedes menjamin bahwa subset $E_y := \{ m$□ℕ$: y < m \}$ dari ℕ tidak kosong. Menggunakan Sifat Urutan, E_y mempunyai elemen yang paling kecil, yang dinotasikan dengan n_y . Oleh karena itu, $n_y - 1$ bukan elemen E_y . Akibatnya diperoleh bahwa $n_y - 1 < y < n_y$

Eksistensi Bilangan Real dan Densitas Bilangan Rasional di ℝ

Salah satu penggunaan Sifat Supremum adalah dapat digunakan untuk memberikan jaminan eksistensi bilangan-bilangan real. Berikut ini akan ditunjukkan bahwa ada bilangan real positif x sedemikian hingga $x^2 = 2$.

Teorema 1.4.8. *Ada bilangan real positif x sedemikian hingga* $x^2 = 2$.

Bukti.

Dibentuk himpunan $S = \{s \in \mathbb{R} : s > 0$ dan $s^2 < 2\}$. Jelas bahwa $1 \in$ S dan $S \neq \phi$*, S terbatas di atas.* sebab $0 \in S$ dan $1 \in S$. S terbatas di atas dengan salah satu batas atasnya adalah 2. Jika $t > 2$, maka $t^2 > 4$. Jadi, $t = 2$ tidak anggota S. Menggunakan Aksioma Supremum, $S \in \mathbb{R}$, $S \neq \phi$, dan S terbatas ke atas, maka S mempunyai supremum. Namakan $x =$ sup S, dengan $x \in \mathbb{R}$.

Akan dibuktikan bahwa $x^2 = 2$. Andaikan $x^2 \neq 2$, maka $x^2 < 2$ atau $x^2 > 2$.

Bukti Lanjutkan sebagai latihan

1.4.9. Teorema Densitas (The Density Theorem) *Jika* $x, y \in \mathbb{R}$ *dengan* $x < y$ *, maka ada bilangan rasional* $q \in \mathbb{Q}$ *sedemikian hingga* $x < q < y$.

Bukti. Dengan tidak mengurangi keumuman (*without loss of generality*), diambil $x > 0$.

Karena $x < y$, maka $y > 0$ dan $y - x > 0$. Akibatnya $\frac{1}{Y} - x > 0$, sehingga dapat dipilih $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $n > \frac{1}{Y} - x$. Untuk n di atas, berlaku $ny - nx > 1$, yaitu $nx + 1 < ny$. Karena $nx > 0$, maka dapat dipilih $m \in \mathbb{N}$ sehingga $m - 1 < nx < m$.

Bilangan m di atas juga memenuhi $m < ny$, sebab dari $m - 1 < nx$ diperoleh $m < nx + 1 < ny$. Jadi $nx < m < ny$. Akibatnya untuk $q = \frac{m}{n}$ mempunyai sifat $x < \frac{m}{n} = q < y$. Jadi, terdapat bilangan rasional $q = \frac{m}{n}$ dengan sifat $x < q < y$. Berikut ini diberikan akibat dari Teorema Densitas, yaitu di antara dua bilangan real pasti dapat ditemukan bilangan irrasional.

Akibat 1.4.10. *Jika $x, y \in \mathbb{R}$ dengan $x < y$, maka ada bilangan irrasional r sedemikian hingga $x < r < y$.*

Bukti. Menggunakan Teorema Densitas, ada bilangan real $\frac{x}{\sqrt{2}}$ dan $\frac{y}{\sqrt{2}}$ dengan sifat ada bilangan rasional q dengan sifat $\frac{x}{\sqrt{2}} < q < \frac{y}{\sqrt{2}}$. Akibatnya $x < q\sqrt{2} < y$ dan $q\sqrt{2}$ merupakan bilangan irrasional.

BAB V

INTERVAL DALAM BILANGAN REAL

1.5 Interval dalam R

Jika diberikan a, b ϵ R dengan a < b, maka **interval terbuka** yang ditentukan oleh a dan b adalah himpunan

$$(a, b) = \{x \epsilon R : a < x < b\}$$

Titik a dan b disebut **titik ujung interval**. Titik ujung tidak memuat dalam interval terbuka. Jika kedua titik ujung digabungkan kedalam interval terbukanya, maka disebut **interval tertutup**, yaitu himpunan

$$[a, b] = \{x \epsilon R : a \leq x \leq b\}$$

Interval **setengah terbuka** atau **setengah tertutup** adalah interval yang memuat salah satu titik ujungnya. Gabungan interval terbuka dengan titik ujung a, ditulis $[a, b]$, dan gabungan interval terbuka dengan titik ujung b, ditulis $(a, b]$. Masing-masing interval tersebut terbatas dan mempunyai **panjang** yang didefenisikan dengan b-a. jika a = b, maka interval terbukanya berkorespondensi dengan himpunan kosong (a,a) = Ø, dan interval tertutupnya berkorespondensi dengan himpunan singleton $[a, a]$ = $\{a\}$.

Berikut ini diberikan lima jenis interval tidak terbatas. Symbol ∞ (atau +∞) dan -∞ digunakan sebagai symbol titik ujungnya yang tak terhingga. **Interval terbuka tak terbatas** adalah himpunan dengan bentuk

(a, ∞) = $\{x \in R : x > a\}$ dan $(-\infty, b)$ = $\{x \in R : x < b\}$

Himpunan pertama tidak mempunyai batas atas dan yang kedua tidak mempunyai batas bawah. Himpunan (a, ∞) sering juga disebut dengan sinar terbuka. Diberikan **interval tertutup tak terbatas**, yaitu (a, ∞) = $\{x \in R : a \leq x\}$ dan $(-\infty, b)$ = $\{x \in R : x \leq b\}$

Himpunan $[a, \infty)$ sering disebut dengan **sinar tertutup**. Himpunan R dapat dituliskan sebagai $(-\infty, \infty) = R$. Perhatikan bahwa $\infty\ dan - \infty$ bukan elemen R.

Teorema 1.5.1 Teorema Karakteristik Interval. Jika S adalah subset R yang memuat paling sedikit dua titik dan mempunyai sifat :

$$jika\ x, y \in S\ dan\ x < y, maka\ [x, y] \subseteq S$$

Maka S merupakan suatu interval

Interval susut(nested intervals)

Telah diketahui bahwa barisan adalah fungsi $f : R \to A \neq \emptyset$. jika A adalah himpunan interval-interval, maka terbentuk barisan interval $\{I_n\}_{n\geq 1}$. Untuk mempersingkat penulisan, barisan $\{I_n\}_{n\geq 1}$ cukup ditulis $I_{n.}$

Definisi 1.5.2 (Interval Susut).

Barisan $I_{n.}, n \in \mathbb{N}$ dikatakan interval susut jika $I_1 \supseteq I_{2.} \supseteq I_{3.} .... \supseteq I_{n.} \supseteq I_{n+1.} \supseteq ....$

Contoh 1.5.3

1. Diberikan $I_{n.}$ = $\left[0, \frac{1}{n}\right], n \epsilon \mathbb{N}$. Yaitu $I_{1.}$ = $[0,1]$ $I_{2.}$ = $\left[0, \frac{1}{2}\right], I_{3.}$ $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, ... maka $I_1 \supseteq I_{2.} \supseteq I_{3.}$.... dan $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ = $\{0\}$ (mempunyai titik berserikat).
2. Diberikan $I_{n.}$ = $\left[0, \frac{1}{n}\right], n \epsilon \mathbb{N}$. Diperoleh bahwa maka $I_n \supset I_{n+1.}$ untuk setiap $n \epsilon \mathbb{N}$. tetapi $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$. Jadi interval susut belum tentu mempunyai titik berserikat. Sebab, andaikan terdapat $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, maka $x \in I_n$ untuk setiap n ∈ ℕ, karena x > 0, maka terdapat n ∈ ℕ sedemikian hingga $\frac{1}{n}$ < x. kontradiksi dengan pengandaian. Jadi pengandaian salah. Yang benar adalah $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$.

3. Diberikan $I_{n.} = \left[0{,}1 + \frac{1}{n}\right]$ maka $I_1 = [0{,}2]$ $I_2 = \left[0, 1\frac{1}{2}\right]$ $I_3 = \left[0, 1\frac{1}{3}\right]$, ... diperoleh $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n =$ $[0{,}1] = \emptyset$. Ada tak hingga banyak $\xi \in [0{,}1]$. Perhatikan bahwa inf $\left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = 1$.

1.5.4 Sifat Interval Susut (nested interval property)

Jika $I_n = [a_n, b_n], n \in R$ interval tertutup terbatas dan $I_n \supseteq I_{n+1}$ untuk setiap $n \in R$ (interval susut), maka terdapat $\xi \in$ R sedemikian hingga $\xi \in I_n$ untuk setiap $n \in R$ (interval susut) ,maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$
Yaitu terdapat $\xi \in R$ sedemikian hingga $\xi \in I_n$ untuk setiap $n \in R$
Selanjutnya jika panjang $I_n = b_n - a_n$ memenuhi inf $\{b_n - a_n : n \in R\} = 0$, maka elemen berserikat ξ tersebut tunggal.

Bukti.

Dibentuk himpunan $A = \{a_n : n \in R\}$. jelas $A \neq \emptyset$ sebab $a_1 \in A$, dan $A \subset R$
Himpunan *A* terbatas ke atas,sebab $I_n \supseteq I_{n+1}$ untuk setiap $n \in R$. sehingga di peroleh bahwa $a_n \leq b_n$
Untuk setiap $n \in R$, yang berarti b_1 batas *A*. menggunakan sifat lengkap R. Maka supremum *A* ada ,yaitu terdapat $\xi \in R$ sedemikian hingga $\xi =$ sup *A*. jelas bahwa $a_m \leq \xi$
Untuk setiap $m \in R$. selanjutnya, untuk sebarang *m*, $n \in R$ berlaku $a_n \leq a_{n+m} \leq b_{n+m} \leq b_m$ atau $a_n \leq b_m$

Hal ini berakibat
Sup $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leq b_m$ atau $\xi \leq b_m$, Karena $a_m \leq \xi$ dan $\xi \leq b_m$, maka diperoleh $a_m \leq \xi \leq b_m$ untuk setiap *m* $\in \mathbb{N}$, berarti $\xi \in I_n = [a_{n\,,} b_n]$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Sehingga $\xi \in \bigcap_{n+1}^{\infty} I_n$
yang berakibat $\bigcap_{n+1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. jika $\eta = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. maka dengan cara yang cara yang sama (sebelumnya),diperoleh $\eta \in I_m$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$ sehingga di peroleh $\eta \in \bigcap_{n+1}^{\infty} I_n$
akan dibuktikan ketunggalannya ,yaitu $\eta = \xi$ diambil sebarang $\varepsilon > 0$ jika inf $\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $0 \leq \eta - \xi \leq bn_0 - an_0 < \varepsilon$ atau $0 \leq \eta - \xi < \varepsilon$
Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$ maka $\eta - \xi = 0$ atau $\eta = \xi$. jadi,terbukti bahwa $\eta = \xi \in \bigcap_{n+1}^{\infty} I_n$ tunggal.

Himpunan terhitung (countable)

Diberikan *f(n)* = {1,2,3,...,*n*} , $n \in \mathbb{N}$. dua himpunan *A* dan *B* dikatakan **ekuivalen** Ditulis $A \sim B$ jika ada fungsi bijektif $f : A \rightarrow B$
contoh:

1. Misalkan *A* ={1,2,3} dan *B*={a,b,c} , maka $A \sim B$
2. misalkan $f : A \rightarrow C$ dengan *C*={w,x,y,z} , maka $A - C$

suatu himpunan dikatakan **tak berhingga**(*infinite*) jika himpunan tersebut ekuivalen dengan salah satu himpunan bagian sejatinya. Jika tidak demikian, maka himpunan tersebut dikatakan **berhingga**(*finite*),yaitu ekuivalen dengan dengan *f(n)* contoh:

1. himpunan *A* ={1,2,3} berhingga
2. $\mathbb{N}$ ={1,2,3... }, *T* ={2,4,6,...} $\subset \mathbb{N}$ .fungsi
   $f : \mathbb{N} \rightarrow T$
   $n \rightarrow f(n) = 2n$
   jadi , $\mathbb{N}$ tak berhingga, *T* juga tak berhingga

suatu himpunan *D* dikatakan *denumerable* jika $D \sim \mathbb{N}$. Suatu himpunan dikatakan **terhitung** (*countable*) jika himpunan tersebut berhingga atau *denumerable*. Jika tidak,maka dikatakan himpunan **tak berhitung** (*uncountable* atau *non denumerable*), yaitu himpunan yang tidak ekuivalen dengan $\mathbb{N}$. Jika himpunan *A* terhitung ,maka *A* dapat disajikan sebagai $A\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ dengan $x_i \neq x_j$ untuk $i \neq j$

contoh :

1. Himpunan $\emptyset$ terhitung berhingga
2. Himpunan $\mathbb{N}$ terhitung tak berhingga
3. Himpunan A = {1,2,3… } terhitung berhingga

Dapat ditunjuk bahwa $\mathbb{R}$ merupakan himpunan tak berhitung.untuk membuktikan cukup hanya dengan membuktikan I = $[0,1]$ tak terhitung.berikut ini diberikan teoremanya

Teorema 1.5.5. himpunan I= $[0,1]$ tak terhitung

Bukti.

Andaikan I terhitung,maka dapat ditulis dengan I=$\{x_1, x_2, x_3, \dots x_n, \dots\}$

Dikonstruksikan barisan interval tertutup ,terbatas, susut (*nested*), dan inf $\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$ interval I= $[0,1]$ dibagi menjadi tiga sama panjang,yaitu $[0, {}^1/_3]$, $[{}^1/_3\ {}^2/_3]$, dan $[{}^2/_3\ , 1]$.

Titik $x_1 \in I$ termuat dalam paling banyak dua sub interval. Pilih sub interval yang tidak memuat x_1, namakan I_1= $[a_1, b_2]$ jadi, $x_1 \notin I_1$ selanjutnya, I_1 dibagi menjadi tiga sama panjang, yaitu

$[a_1, a_1 + {}^1/_9]$, $[a_1 + {}^1/_9\ , a_1 + {}^2/_9]$, dan $[a_1 + {}^2/_9\ , b_1]$.

Kemudian pilih sub interval yang tidak memuat x_2 , namakan I_1 = □ a_2 , b_2 □ □.

Jadi, $x_2 \notin I_2$. Jika proses diteruskan, diperoleh barisan interval tertutup, terbatas,$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_n$ dengan inf $\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\}$ = inf $\left\{\frac{1}{3}\ \mathbb{N}\right\}$ Menggunakan sifat *Nested Interval*, maka terdapat dengan tunggal $y \in \bigcap_{n+1}^{\infty} I_n$

Berarti $y \in I$, yaitu $y = x_n$ untuk suatu $n \in \mathbb{N}$. Akibatnya $x_n \bigcap_{n+1}^{\infty} I_n$, yaitu $x_n \in I_n$. Sedangkan dari konstruksi diperoleh $x \notin I_n$. Timbul kontradiksi, yang benar adalah I=$[0,1]$ tak terhitung sehingga $\mathbb{R}$ juga tak terhitung.

Teorema Bolzano-Weierstrass

Sebelum dijelaskan tentang Teorema Bolzano-Weierstrass, terlebih dahulu dijelaskan mengenai titik cluster. Berikut diberikan definisinya

Definisi 1.5.6. (Titik Cluster) Diberikan subset tak kosong $S \subseteq \mathbb{R}$. Titik $x \in \mathbb{R}$ disebut **titik cluster** (*cluster points*) jika setiap persekitaran $V\varepsilon\ (x) = (x - \varepsilon\ , x + \varepsilon\ )$ memuat paling sedikit satu titik anggota S yang tidak sama dengan x. Titik cluster sering disebut dengan **titik akumulasi** atau **titik limit**.

Dengan kata lain, x titik cluster S jika untuk setiap x = 0 berlaku $(V_\varepsilon(x) \cap S) - \{x\} \neq \emptyset\ atau\ (V_\varepsilon(x) - \{x\}) \cap S \neq \emptyset$.

Ekuivalen dengan mengatakan bahwa x titik cluster S jika untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ terdapat $s_n \in S$ sedemikian hingga $0 < |s_n - x| < \frac{1}{n}$.

Contoh 1.5.7.

(1) Diberikan S= $(0, 2)$. Apakah 0 merupakan titik cluster?

Jawab. Diambil □□□ □0 , maka □□V□□□0□□ □=□□0□-□□□, 0□+□□□□ □=□□-□□,□□□□. Menggunakan Teorema Densitas, maka 0 merupakan titik cluster *S* dan 0 □ *S*. Demikian juga bahwa $\frac{1}{2}$ merupakan titik cluster *S* dan $\frac{1}{2} \in S$.

(2) Diberikan $A = [1,2] \cup \{4\}$. Apakah 4 titik cluster?

Jawab. Persekitaran- □ dari 4 adalah V□ □4 □ = □4 - □ , 4 + □ □ . Misal diambil $\varepsilon = \frac{1}{2}, maka\ V_\varepsilon(4) = \left(4 - \frac{1}{2}, 4 + \frac{1}{2}\right) = \left(3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}\right)$ sehingga diperoleh bahwa $\left(3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}\right) \cap [1,2] - \{4\} = \emptyset$. Jadi, 4 bukan titik cluster.

(3) Diberikan $B = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ Tunjukan bahwa 0 titik cluster *B* dengan 0 □ *B*.

Jawab. Menggunakan Sifat Archimedes, jika diberikan seberang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Pesekitaraan titik 0 adalah $V_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$. Jika dipilih ε sangat kecil, maka $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Jadi, 0 merupakan titik cluster *B* dengan 0 □ *B*.

1.5.8. Teorema Bolzano-Weierstrass *Setiap subset $\mathbb{R}$ yang tak berhingga (infinite) dan terbatas, mempunyai paling sedikit satu titik cluster.*

Bukti.

Diberikan sebarang subset *S* □ $\mathbb{R}$ tak berhingga dan terbatas. Karena *S* terbatas, maka terdapat interval I_1 = □ *a* , *b*□ dengan panjang $\mathcal{L}(I_1) = b - a$. Kemudian bagilah I_1 menjadi dua bagian, yaitu $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ dan $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ Karena *S* tak berhingga, maka salah satu interval tersebut memuat tak hingga banyak titik anggota *S*, sebab apabila keduanya memuat berhingga banyak anggota *S*, maka berarti himpunan *S* berhingga. Namakan bagian yang memuat tak hingga banyak titik anggota *S* dengan I_2 . Panjangnya $\mathcal{L}(I_2) = \frac{b-a}{2}$ Selanjutnya, I_2 dibagi menjadi dua bagian seperti langkah 2 di atas, maka salah satu bagian memuat tak hingga banyak anggota *S*. Namakan bagian tersebut dengan I_3 . Panjangnya $\mathcal{L}(I_3) = \frac{b-a}{2^2}$. Apabila proses diteruskan, maka diperoleh barisan interval susut (***nested***) $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$

Menurut Sifat Interval Susut, maka

$\bigcap_{n+1}^{\infty} I_n \not\equiv \emptyset$, atau terdapat $x \epsilon \bigcap_{n+1}^{\infty} I_n$ Akan ditunjukkan bahwa x titik cluster S.

Diambil sebarang > 0 , maka terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $\frac{b-a}{2^{n-1}} < \varepsilon$, dan persekitarannya $V_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Karena $x \epsilon I_n$ dan $\mathcal{L}(I_n) = \frac{b-a}{2^{n-1}} < \varepsilon$, maka $I_n \subseteq V_\varepsilon(x)$. Karena I_n memuat tak hingga banyak titik anggota *S*, maka $V_\varepsilon(x)$ memuat tak hingga banyak titik anggota *S* yang tidak sama dengan *x*. Jadi, *x* merupakan titik cluster *S*.

Himpunan Terbuka dan Tertutup

Defenisi 1.5.9

1. Himpunan $G \subseteq R$ dikatakan **terbuka** dalam R jika untuk setiap $x \in G$,terdapat persekitaran $V,(x)$sedemikian sehingga $V,(x) \subset G$
2. Himpunan $F \subseteq R$ dikatan **tertutup** dalam R jika komplemen *F*, yaitu *F* terbuka dalam *R*

Contoh 1.5.10.

1) Himpunan $R = (-\infty, \infty)$ terbuka, sebab untuk setiap $x \epsilon R$ terdapat $V,(x) = (x - 1, x + 1) \subset R$
2) Himpunan terbuka $A = (0,1)$sebab jika diambil $\varepsilon = \min\left\{\frac{x}{2}, \frac{x-1}{2}\right\}$ untuk setiap $x \in A$, maka $V,(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$

3) Himpunan $B = [1,2]$ tertutup, sebab jika diambil $x = 1$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0, V(1) = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \not\subset B$ dan $1-\varepsilon \notin B$. Dapat di tunjukkan juga bahwa ***B*** terbuka , yaitu $\boldsymbol{B'} = (-\infty, \mathbf{1}) \cup (\mathbf{2}, \infty)$Terbuka.

1.5.11 Sifat himpunan terbuka

a) Jika *A* himpunan indeks (berhingga atau tak berhingga) dan G, terbuka untuk setiap $\lambda \epsilon A$ maka $\bigcup_{\lambda\epsilon A} G_\lambda$ terbuka.

b) Jika $G_1, G_2, \ldots, G_n$ masing-masing merupakan himpunan terbuka ,maka $\bigcap_{i=1} G_i$ terbuka.

Bukti .

a. Namakan $G = \bigcup_{\lambda\epsilon A} G\lambda$ diambil sebarang $x \in G$,,maka terdapat $\lambda\epsilon A$ sedemikian hingga $x \in G$ karena $G\lambda$ terbuka, maka terdapat $V, (x) \subset \mathrm{G}^0 \subset \mathrm{G}$. Jadi ,terbukti bahawa untuk setiap $x \in G$,terdapat yang berarti $G = \bigcup_{\lambda\epsilon A} G\lambda$ terbuka.

b. Namakan $H = \bigcap_{i=1} G_i$akan ditunjukan bahwa H terbuka .diambil sebarang $y = H$,maka $x \in G, i = 1,2, \ldots, n$. Karena $x \in G_1$,dan G_1 terbuka ,maka terdapat $\varepsilon_1 > 0$ sehingga $V_1(x) \subset G_1$ karena $x \in G_2$ danG_2 terbuka ,maka terdapat $\varepsilon_2 > 0$ sehingga $V_2(x) \subset G_2$ demikian seterusnya.

Berikut ini diberikan akibat dari sifat himpunan terbuka.yaitu sifat untuk himpunan tertutup.

Akibat 1.5.12

a. Jika A himpunan indeks (berhingga atau tak terhingga dan G tertutup untuk setiap $\lambda\epsilon A$ maka $\bigcup_{\lambda\epsilon A} G_\lambda$ tertutup

b. Jika $G_1, G_2, \ldots G_n$ masing-masing merupakan himpunan tertutup maka $\bigcup_{i=1}^{n} G_i$ tertutup.

BAB VI

BARISAN DAN DERET BILANGAN REAL

Barisan dan Limit Barisan

Barisan (sequence) pada himpunan S adalah suatu fungsi dengan domain $\mathbb{N}$ dan mempunyai range dalam S. Pada subba ini akan dibahas mengenai barisan di $\mathbb{R}$ dan konvergensi dari suatu barisan.

1. Definisi barisan bilangan real

   Barisan bilangan real adalah suatu fungsi yang didefenisikan pada hipunan $\mathbb{N}$ dengan range dalam $\mathbb{R}$.

   Dengan kata lain , barisan dalam $\mathbb{R}$ mengawankan setiap bilangan asli $n = 1,2,3,\ldots$ kepada suatu bilangan real. Jika $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ merupakan barisan, maka biasanya dituliskan dengan nilai dari X pada n dengan notasi x_n. Barisan sering dinotasikan dengan X atau (x_n) atau $(x_n : n \in N)$ atau $\{x_n\}$ atau $\{x_n\}_{n\geq 1}$. Apabila diketahui suatu barisan Y, artinya $Y = (y_k)$.

   Contoh :

   a) Barisan (x_n) dengan $x_n = (-1)^n$ adalah barisan $-1,1,-1,1,-1,1,\ldots(-1)^n,\ldots.$
   b) Barisan (x_n) dengan $x_n = \frac{1}{2^n}, \left(\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right) = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots.$
   c) Barisan konstan (k_n) dengan $k_n = 3$ $adalah$ $3,3,3,3,\ldots.$
   d) Barisan $\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots.$

2. Defenisi 2.1.3.

   Diberikan barisan bilangan real (x_n) dan (y_n) dan $\alpha \in \mathbb{R}$. Maka dapat didefenisikan :

   a) $(x_n) \pm (y_n) = (x_n \pm y_n)$
   b) $\alpha(x_n) = (\alpha x_n)$
   c) $(x_n) \cdot (y_n) = (x_n \cdot y_n)$
   d) $\frac{(x_n)}{(y_n)} = \left(\frac{x_n}{y_n}\right), asalkan\ y_n \neq 0$

3. Defenisi limit barisan

   Diketahui (x_n) barisan bilangan real. Suatu bilangan real x dikatakan limit barisan (x_n) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq K(\varepsilon)$ $berlaku$ $|x_n - x| < \varepsilon.$

Jika x adalah limit suatu barisan (x_n), maka dikatakan (x_n) konvergen ke x, atau (x_n) mempunyai limit x. Dalam hal ini ditulis $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x$ atau $\lim(x_n) = x \; atau \; x_n \to x$. Jika (x_n) tidak kovergen, maka (x_n) dikatakan divergen.

4. Teorema 2.1.5.

Jika barisan (x_n) konvergen, maka (x_n) mempunyai paling banyak satu limit (limitnya tunggal)

Bukti :

Andaikan $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x'$ dan $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x''$. Maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat K' sedemikian sehingga $|x_n - x'| < \varepsilon/2$ untuk setiap $n \geq K'$, dan terdapat K'' sedemikian sehingga $|x_n - x''| < \varepsilon/2$ untuk setiap $n \geq K''$. Dipilih $K = max\{k', k''\}$. Menggunakan ketaksamaan segtiga, maka untuk $n \geq K$ diperoleh

$|x' - x''| = |x' - x_n + x_n - x''|$

$|x' - x''| = |x' - x_n| + |x_n - x''|$

$< {}^{\varepsilon}/_{2} + {}^{\varepsilon}/_{2} = \varepsilon$

Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $x' - x'' = 0$ yang berarti $x' = x''$. Kontradiksi dengan pengandaian. Jadi, terbukti bahwa limitnya tunggal.

5. Teorema 2.1.6

Jika (x_n) barisan bilangan real dan $x \in \mathbb{R}$, maka empat pernyataan berikut ekuivalen.

a) Barisan (x_n) konvergen ke x.
b) Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$.
c) Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.
d) Untuk setiap persekitaran $V_\varepsilon(x) dari\; x$, terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $x_n \in V_\varepsilon(x)$.

Bukti :

a) $\Longrightarrow (b)\; dari\; defenisi.$
b) $\Longrightarrow (c) |x_n - x| < \varepsilon \Leftrightarrow x_n - x < \varepsilon \Leftrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon.$
c) $\Longrightarrow (d) x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \Leftrightarrow x_n \in V_\varepsilon(x).$
d) $\Longrightarrow (a) x_n \in V_\varepsilon(x) \Leftrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$

Contoh :

1) Tunjukan bahwa $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Jawab :

Akan ditunjukan bahwa $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ konvergen ke 0 , yaitu $\frac{1}{n} \to 0$. Harus dibuktikan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ maka $\frac{1}{\varepsilon} > 0$. Menurut sifat archimedes, maka terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $\frac{1}{\varepsilon} < K(\varepsilon)$, atau $\frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon$. Akibatnya untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon$. Jadi terbukti bahwa setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ atau $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2) Tunjukan bahwa $((-1)^n)$ divergen.

Jawab :

Andaikan $((-1)^n)$ konvergen, berarti terdapat bilangan real x sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|(-1)^n - x| < 1$. Untuk $n \geq K$ dan n genap maka $(-1)^n = 1$, diperoleh :

$|1 - x| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - x < 1$

Yang berakibat $x < 0$. Timbul kontradiksi, yaitu $x > 0$. Jadi pengandaian salah , yang benar $((-1)^n)$ divergen.

6. Teorema 2.1.9

Diberikan barisan bilangan real $X = (x_n : n \in \mathbb{N})$ dan $m \in \mathbb{N}$. Maka $X_m = (x_{m+n} : n \in \mathbb{N})$ konvergen jika dan hanya jika X konvergen. Daam hal ini $\lim X_m = \lim\ X$.

Bukti :

Perhatikan bahwa untuk sebarang $p \in \mathbb{N}$, elemen ke-p dari X_m adalah elemen ke-$(p + m)$ dari X. Sama halnya, jika $q > m$, maka bentuk elemen ke-q dari X_m adalah elemen ke-$(q - m)$ dari X.

Diasumsikan bahwa X konvergen ke x. Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, pada barisan X untuk $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$, maka pada X_m untuk $k \geq K(\varepsilon) - m$ berlaku $|x_k - x| < \varepsilon$. Dapat diambil $K_m(\varepsilon) = k(\varepsilon) - m$, sehingga X_m konvergen ke x.

Sebaiknya, jika pada X_m untuk $k \geq K_m(\varepsilon)$ berlaku $|x_k - x| < \varepsilon$, maka pada X untuk $n \geq K(\varepsilon) + m$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$. Dapat diambil $k(\varepsilon) = K_m(\varepsilon) + m$. Dengan demikian terbukti bahwa X konvergen ke x jika X_m konvergen ke x.

7. **Teorema 2.1.10.**

Diberikan barisan bilangan real (x_n) $dan\ x \in \mathbb{R}$. Jika (a_n) adalah suatu barisan bilangan real positif dengan $\lim(a_n) = 0$ dan jika untuk $c > 0$ dan $m \in \mathbb{N}$ berlaku :

$|x_n - x| \leq ca_n\ untuk\ semua\ n \geq m$

Maka $\lim\,(x_n) = x$.

Bukti :

Diambil $\varepsilon > 0$, maka $\frac{\varepsilon}{c} > 0$. Karena $\lim(a_n) = 0$, maka terdapat $K(^{\varepsilon}/_{c}) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K(^{\varepsilon}/_{c})$ berlaku $|a_n - 0| < {}^{\varepsilon}/_{c}$. Akibatnya untuk setiap $n \geq K(^{\varepsilon}/_{c})$ berlaku $|x_n - x| \leq c|a_n| < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$ atau $|x_n - x| < \varepsilon$. Terbukti bahwa $\lim\,(x_n) = x$.

Contoh : jika $a > 0$, tunjukan bahwa $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+na} = 0$.

Jawab :

Karena $a > 0$, maka $0 < na < 1 + na$ yang berakibat bahwa

$0 < \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{a}\ , untuk\ setiap\ n \in \mathbb{N}$.

Diperoleh

$\left|\frac{1}{1+na} - 0\right| = \left|\frac{1}{1+na}\right| < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot \left|\frac{1}{n}\right|\ untuk\ setiap\ n \in \mathbb{N}$

Karena telah diketahui bahwa $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, maka menurut teorema 2.1.10 dam dengan mengambil $c = \frac{1}{a} > 0$ berakibat bahwa $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+na} = 0$.

BAB VII

LIMIT BARISAN

Teorema- teorema Limit

Pada sub bab ini akan dibahas mengenai beberapa teorema yang berkaitan dengan limit pada barisan bilangan real, seperti barisan terbatas dan kekonvergenan barisan.

Definisi 2.2.1 Barisan bilangan real $X = (x_n)$ dikatan terbatas jika terdapat milangan real $M > 0$ sedemikian sehingga $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Oleh karena itu, barisan (x_n) terbatas jika dan hanya jika himpunan $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ merupakan subset terbatas dari $\mathbb{R}$

Teorema 2.2.2 Jika $X = (x_n)$ $konvergen, maka$ $X = (x_n)$ terbatas

Bukti

Diketahui $X = (x_n)$ konvergen, misalkan konfergen ke x, diambil $\mathcal{E} = 1$, maka terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x - x_n| < 1$ menggunakan akibat ketaksamaan segi tiga, maka $|x_n| - |x| < 1$ atau $|x_n| < 1 + |x|$untuk semua $n \geq K$. Namakan $M = \max\{x_1, x_2, x_3, , , , x_{k-1}|x| + 1\}$, maka $|x_n| \leq M$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$, jadi, terbukti bahwa $X = (x_n)$ terbatas.

Teorema 2.2.3 *Jika* $X = (x_n) \to x, Y = (y_n) \to y$ dan $c \in \mathbb{R}$, maka

a) $X \pm Y \to x + y$

b) $X.Y \to xy$

c) $cX \to cx$

Bukti.

a) Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ karena $X = (x_n) \to x$ maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq n_0$berlaku $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ karena $Y = (y_n) \to y$, maka terdapat $n_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq n_1$berlaku $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ pilih $n_1 = \max\{n_0, n_1\}$ maka akibatnya untuk $n \geq n_1$, berlaku $|x_n + y_n - (x - y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x + y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka $(x_n + y_n)$ konfergen ke $x + y$ dengan cara yang sama diperoleh bahwa $(x_n + y_n)$ konfergen ke $x - y$, jadi terbukti bahwa $X \pm Y \to x + y$

b) Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n y_n - xy| < \varepsilon$ diketahui. $|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy|$

$$\leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy|$$
$$= |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y|$$

Karena $(x_n) \to x$ maka (x_n) terbatas, akibat nya terdapat $M_1 > 0$ sedemikian hingga $|x| \leq M_1$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Namakan $M = \max\{M_1, |y|\}$, diambil sebarang $\varepsilon > 0$, karena $(x_n) \to x\,, maka\ terdapat\ K_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K_1$ berlaku $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2M}$, karena $y_n \to y$, maka terdapat $K_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K_2$ berlaku $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M}$. namakan $K = \max\{K_1, K_2\}$, maka untuk setiap $n \geq K$ berlaku

$$|x_n y_n - xy| \leq |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y| < M.\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M}.M = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Jadi, terbukti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n y_n - xy| < \varepsilon$ dengan kata lain , terbukti bahwa $X.Y \to xy$.

c) Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ karena $(x_n) \to x$ maka terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Perhatikan bahwa :

$$|cx_n - x| = |cx_n - x_n + x_n - x|$$
$$\leq |cx_n - x_n| + |x_n - x| = |x_n||c - 1| + |x_n - x|$$

Karena $(x_n) \to x$ maka(x_n) terbatas, yaitu terdapat $M > 0$ sedemikian hingga $|x_n| \leq M$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Akibatnya

$$|x_n||c - 1| + |x_n - x| < M.|c - 1| + \frac{\varepsilon}{2} = (M.|c - 1| +) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Terbukti bahwa untuk setiap setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|cx_n - x| < \varepsilon$ dengan kata lain, terbukti bahwa $cX \to cx$.

Teorema 2.2.4 Jika$X = (x_n) \to x\ dan\ Z = (z_n) \to z\ \neq 0\ dengan\ z \neq 0\ untuk\ semua\ n \in \mathbb{N}\,, maka\ \frac{1}{Z} = \left(\frac{x_n}{z_n}\right) \to \frac{x}{z}$

Bukti.

Terlebih dahulu harus dibuktikan bahwa$\frac{1}{Z} = \left(\frac{1}{z_n}\right) \to \frac{1}{z}$ diambil $\alpha = \frac{1}{2}|z|$, maka $\alpha > 0$ karena $\lim(z_n) = z$, maka terdapat $K_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|z_n - z| < \alpha$,menggunakan akibat ketaksamaan segitiga bahwa $-\alpha \leq -|z_n - z| \leq |z_n| - |z|$ untuk $n \geq K_1$, yang berarti $\frac{1}{2}|z| = |z| - \alpha \leq |z_n|$, untuk $n \geq K_1$, oleh karena $\frac{1}{|z_n|} \leq \frac{1}{|x|}$ untuk $n \geq K_1$, maka di peroleh

$$\left|\frac{1}{z_n}-\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{z-z_n}{z_n z}\right| = \frac{1}{|z_n z|} \leq \frac{2}{|z|^2}|z-z_n|.$$

Selanjutnya, diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat $K_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga jika $n \geq K_2$, maka $|z_n - z| < \frac{1}{2}\varepsilon|z|^2$. Jika diambil $K(\varepsilon) = \max\{K_1, K_2\}$, maka

$\left|\frac{1}{z_n}-\frac{1}{z}\right| < \varepsilon$ unutuk semua $n \geq \varepsilon$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka terbukti bahwa $\lim\left(\frac{1}{z_n}\right) = \frac{1}{z}$ atau $\left(\frac{1}{z_n}\right)$ konvergen ke $\frac{1}{z}$, Menggunakan Teorema 2.2.3(ii) dan dengan mengambil Y sebagai barisan $\left(\frac{1}{z_n}\right)$, maka $X \cdot Y = \left(\frac{x_n}{z_n}\right) \to x\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{z}$.

Teorema 2.2.5 Jika $X = (x_n)$ barisan bilangan real $x_n \geq 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dan $(x_n) \to x$, maka $x \geq 0$.

Bukti.

Diambil $\varepsilon = -x > 0$. Karena $(x_n) \to x$, maka terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku

$$\begin{aligned} |x_n - x| < \varepsilon &\Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - x < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \\ &\Leftrightarrow x - (-x) < x_n < x + (-x) \\ &\Leftrightarrow 2x < x_n < 0. \end{aligned}$$

Kontradiksi dengan pernyataan bahwa $x \geq 0$.

Teorema 2.2.6 Jika$(\mathrm{x_n}) \to \mathrm{x}$, $(\mathrm{y_n}) \to \mathrm{y}$,dan$\mathrm{x_n} \geq \mathrm{y_n}$untuk semua$\mathrm{n} \in \mathbb{N}$, maka $\mathrm{x} \leq \mathrm{y}$.

Bukti.

Diberikan $\mathrm{z_n} := \mathrm{x_n} - \mathrm{y_n}$ sehingga $\mathrm{Z} := (\mathrm{z_n}) = \mathrm{Y} - \mathrm{X}$ dan $\mathrm{z_n} \geq 0$ untuk semua $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$. Menggunakan Teorema 2.2.5 dan 2.2.3 diperoleh bahwa $0 \leq \lim \mathrm{Z} = \lim(\mathrm{y_n}) - \lim(\mathrm{x_n})$ atau $\lim(\mathrm{x_n}) \leq \lim(\mathrm{y_n})$.

Jadi, terbukti bahwa $\mathrm{x} \leq \mathrm{y}$.

Teorema 2.2.7 Jika $\mathrm{X} = (\mathrm{x_n})$ konvergen ke x dan jika $\mathrm{a} \leq \mathrm{x_n} \leq \mathrm{b}$untuk semua$\mathrm{n} \in \mathbb{N}$,
maka$a \leq x \leq b$.

Bukti.

Diberikan Y barisan konstan $b, b, b, \ldots$). Menggunakan Teorema 2.2.6 diperoleh bahwa $\lim X \leq \lim Y = \mathrm{b}$. Dengan cara yang sama diperoleh $a \leq \lim \mathrm{X}$. Jadi, terbukti bahwa $a \leq \lim \mathrm{X} \leq \mathrm{b}$ atau $a \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{b}$.

Berikut ini diberikan sebuah teorema yang menyatakan bahwa jika suatu barisan Y berada (tersilip) diantara dua barisan yang konvergen ke titik yang sama, maka Y juga konvergen ke titik yang sama.

Teorema 2.2.8 Diberikan barisan bilangan real $X = (x_n)$, $\mathrm{Y} = (y_n)$, $dan\ Z = (\mathrm{z_n})$*sedemikian hingga* $x_n \leq y_n \leq z_n\ untuk\ semua\ n \in \mathbb{N}$, *dan* $\lim(x_n) = \lim(z_n)$. ***Maka*** Y *kovergen dan*

$$\lim(x_n) = \lim(y_n) = \lim(z_n).$$

Bukti.

Misalkan $w := \lim(x_n) = \lim(z_n)$. Jika diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n - w| < \varepsilon$ dan $|z_n - w| < \varepsilon$, atau dengan kata lain $-\varepsilon < x_n - w < \varepsilon$ dan $-\varepsilon < z_n - w < \varepsilon$. Karena $x_n \leq y_n \leq z_n$, maka

$$x_n - w \leq y - w \leq z_n - w.$$

Akibatnya diperoleh bahwa $-\varepsilon < y_n - w < \varepsilon$. Karena berlaku untuk semua $n \geq K$ dan $\varepsilon > 0$, maka terbukti $\lim(y_n) = w$.

Teorema 2.2.9 jika X = (x_n) $\rightarrow$ x , maka $|X|$ = ($|x_n| \rightarrow |x|$.

Bukti.

Diberikan $\varepsilon > 0$ karena X = (x_n) $\rightarrow$ x, maka terdapat K $\in \mathbb{N}$sedemikian hingga untuk setiap n $\geq$ K berlaku $|X_n - X| < \varepsilon$. Menggunakan akibat ketaksamaan segitiga , diperoleh bahwa setiap n $\in \mathbb{N}$,berlaku

$\| x_n | - |x \| \leq |x_n - x| < \varepsilon$

jadi , diperoleh bahwa $\| x_n | - |x \| < \varepsilon$, atau $x_n \geq 0$, maka barisan bilangan real positif

$(\sqrt{xn}) \rightarrow \sqrt{x}$

Bukti . menurut teorema 2.2.5 diperoleh bahwa x $\geq$ 0. Akan ditunjukkan bahwa teorema benar untuk x = 0 dan x > 0.

Kasus I : Jika x = 0 , diberikan $\varepsilon > 0$. Karena (x_n) $\rightarrow$ x = 0, maka terdapat K $\in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap n $\geq$ K berlaku $0 \leq X_n = X_n - 0 < \varepsilon^2$.

Sehingga di peroleh bahwa $0 \leq \sqrt{xn} < \varepsilon$. Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka terbukti bahwa $(\sqrt{xn}) \rightarrow \sqrt{x}$

Kasus II : jika x > 0 , maka $\sqrt{x} > 0$. Diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat K $\in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap n $\geq$ K berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$. Perhatikan bahwa

$$\sqrt{xn} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{xn} - \sqrt{x)(\sqrt{xn} + \sqrt{x}\,)}}{\sqrt{xn} + \sqrt{x}\,)} = \frac{xn - x}{\sqrt{xn} + \sqrt{x}\,)}.$$

Karena $\sqrt{xn} + \sqrt{x} \geq \sqrt{x} > 0$, maka diperoleh

$|\sqrt{xn} - \sqrt{x}| \leq (\frac{1}{\sqrt{x}})\, |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{x}}$.

karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka terbukti bahwa $(\sqrt{xn}) \rightarrow \sqrt{x}$.

Teorema 2.2.11. jika (x_n) barisan bilangan real (tegas) dengan lim $\left(\frac{xn_{+1}}{xn}\right)$ = L (ada) dan L < 1 , maka (x_n) konvergen dan lim (x_n) =0 .

Bukti.

Dipilih r $\in \mathbb{R}$ sedemikan hingga L < r < 1. Diambil ε = r – L > 0 . karena lim $\left(\frac{xn_{+1}}{xn}\right)$= L , maka terdapat K $\in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap n $\geq$ K berlaku $\left|\frac{xn+1}{xn} - L\right| < \varepsilon$. Karena

$\left|\frac{xn+1}{xn}\right|$- $|L| \leq \left|\frac{xn+1}{xn} - L\right|$,

$\left|\frac{xn+1}{xn}\right|$- $|L|$<ε

Sehingga diperoleh

$\frac{xn+1}{xn}$- L <ε $\Leftrightarrow$ $\frac{xn+1}{xn}$<ε + L < L + r – L = r $\Leftrightarrow$ $x_{n+1} < x_n r$

Jadi , untuk setiap n $\geq$ K berlaku

$0 < x_{n+1} < x_n r < x_{n-1} r^2 < x_{n-2} r^3 < \dots < x_k r^{n+1-k} = \frac{xk}{rk} r^{n+1}$

Jika diambil c $\frac{xk}{rk}$, maka diperoleh

$0 < x_{n+1} < cr^{n+1}$

Mengingat bahwa lim $(r^n) = 0$ (sebab $0 < r < 1$), maka

$\mathrm{Lim}(r^n) = 0 \Rightarrow \lim (r^{n+1}) = 0 \Rightarrow \lim (x_{n+1}) = 0 \Rightarrow \lim (x_n) = 0$

Jadi , terbukti bahwa (x_n) konvergen dan lim (x_n) = 0

BAB VIII

BARISAN BILANGAN REAL

A. Barisan Monoton

Berikut ini diberikan pengertian mengenai barisan naik dan turun monoton.

Definisi 2.3.1. Diberikan barisan bilangan real $X = (x_n)$.

1. Barisan X dikatakan **naik** $(increasing)$ jika $x_n \leq x_{n+1}$ untuk semua $n \in N$,

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots$$

2. Barisan X dikatakan **naik tegas** $(strictly\ increasing)$ jika $x_n < x_{n+1}$ untuk semua $n \in N$.
3. Barisan X dikatakan **turun** $(decreasing)$ jika $x_n \geq x_{n+1}$ untuk semua $n \in N$.

   $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots$
4. Barisan X dikatakan **turun tegas** $(strictly\ decreasing)$ jika $x_n > x_{n+1}$ untuk semua $n \in N$.

Definisi 2.3.2. Barisan $X = (x_n)$ dikatakan monton jika berlaku salah satu X naik atau X turun.

Contoh 2.3.3.

1. Barisan berikut ini naik (monoton).
   a. $(1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots)$
   b. $(1, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, n)$
   c. $(a, a^2, a^3, a^4, \dots, a^n, \dots)$ jika $a > 1$
2. Barisan berikut ini turun (monoton).
   a. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$
   b. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots\right)$
   c. $(b, b^2, b^3, b^4, \dots, b^n, \dots)$ jika $0 < b < 1$
3. Barisan berikut ini tidak monoton.
   a. $(+1, -1, +1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots)$
   b. $(-1, +2, -3, +4, \dots)$
4. Barisan berikut tidak monoton tetapi monoton di akhir (ultimately)
   a. $(7, 6, 2, 1, 2, 3, 4, \dots)$

b. $\left(-2, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$

2.3.4 Teorema Kovergensi Monoton

Misalkan $X = (x_n)$ adalah barisan monoton. Barisan $X = (x_n)$ konvergen jika dan hanya jika (x_n) terbatas. Selanjutnya :

(a) *Jika* $X = (x_n)$ *naik (monoton) dan terbatas ke atas,* maka $X = (x_n)$ *konvergen dengan*

$\lim (x_n) = sup\,\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

(b) *Jika* $Y = (Y_n)$ *turun (monoton) dan terbatas ke bawah,* maka $X = (x_n)$ *konvergen dengan*

$\lim (Y_n) = inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$

Bukti :

Bukti.

$(\Rightarrow)$ Misalkan barisan (x_n) konvergen. Maka (x_n) mestilah terbatas berdasarkan teorema 5.

$(\Leftarrow)$ Misalkan $X = (x_n)$ adalah barisan monoton terbatas, maka X naik atau turun.

(1) **Kasus barisan $X = (x_n)$ naik terbatas.**

Akan dibuktikan bahwa (x_n) konvergen dan $\lim\ (x_n) = \sup\ \{x_n\}$. Karena (x_n) terbatas, maka bilangan $M \in \mathbb{R}, M > 0$, sedemikian sehingga $x_n \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Berdasarkan sifat supremum, $x^* = \sup\ \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

ada. Akan ditunjukkan bahwa $x^* = \lim\ (x_n)$.

Misalkan $\varepsilon > 0$ sebarang, maka $x^* - \varepsilon$ bukan batas atas himpunan

$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, sehingga ada bilangan $K = K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $x^* - \varepsilon < x_k$.

Tetapi karena X adalah barisan naik, maka $x^* - \varepsilon < x_k \leq x_n \leq x^* < x^* + \varepsilon$ untuk semua $n \geq K$.

Akibatnya

$|x_n - x^*| < \varepsilon$ untuk semua $n \geq K$.

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, kita menyimpulkan bahwa (x_n) konvergen ke x^*.

(2) **Kasus barisan $Y = (y_n)$ turun terbatas.**

Akan dibuktikan bahwa (y_n) konvergen dan $\lim(y_n) = inf\ \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Jelas bahwa

$$X = -Y = (-y_n)$$

naik terbatas. Dalam kegiatan (1) kita telah mendapatkan bahwa

$\lim X = \sup\ \{-y_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Di lain pihak, dengan menggunakan Teorema 6 (iv), diperoleh

$\lim X = -\lim Y$.

Pada sisi lain kita juga mempunyai

$\sup\{-y_n : n \in \mathbb{N}\} = -\inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Teorema konvergensi monoton membuktikan eksistensi limit barisan monoton terbatas dan juga memberikan suatu cara menghitung limit barisan asalkan kita mengetahui supremum dan infimumnya.

Contoh 2.3.5.

1. Diketahui barisan (y_n) dengan y_1 =1 dan $y_{n+1} = \sqrt{2 + y_n}$, n $\geq$ 1. Apakah (y_n) konveregen? Jika ya, tentukan lim(y_n).

   Jawab :

   Akan ditunjukkan menggunakan induksi bahwa (y_n) naik monoton.

   Untuk $n = 1$, diperoleh $y_1 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \geq 1$ (benar). Misalkan benar untuk $n = k$, yaitu $y_{n+1} = \sqrt{2 + y_n}$, $y_{n+1} \geq y_k$. Akan dibuktikan benar untuk

   $n = k + 1$, yaitu $y_{k+2} = \sqrt{2 + y_{k+1}} \geq \sqrt{2 + y_k} = y_{k+1}$

   Berarti benar untuk $n = k + 1$. Jadi, menurut induksi (y_n) naik monoton. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa (y_n) terbatas keatas (oleh 3) yaitu $y_n \leq 3$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

   Untuk $n = 1$ benar, sebab $y_1 = 1 \leq 3$. Misalkan benar untuk $n = k$ yaitu $y_k \leq 3$. Maka $y_{k+1} = \sqrt{2 + y_k} \leq \sqrt{2+3} = \sqrt{5} \leq 3$ yang berarti benar untuk $n = k + 1$.

   Jadi, menurut induksi terbukti bahwa $y_n \leq 3$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Karena (y_n) naik monoton dan terbatas keatas, maka menurut Teorema 2.3.4 barisan (y_n) konveregen. Misalkan $y = \lim (y_n)$ maka diperoleh

   $y = \sqrt{2 + y} \Leftrightarrow y^2 = 2 + y \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow (y - 2)(y + 1) = 0.$

   Diperoleh $y = 2$ atau $y = -1$. Untuk $y = -1$ jelas tidak mungkin, sebab

   $1 \leq y_n \leq 3$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Jadi terbukti bahwa (y_n) konveregen dan

   $\lim (y_n) = 2$.

2. Lim $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$.

   Jawab :

   Dengan menggunakan definisi konvegensi barisan, dapat dibuktikan bahwa barisan ini konvergen ke 0.

   Tetapi, sekarang menggunakan Teorema Konvergensi Monotn. Jelas bahwa 0 adalah batas bawah himpunan $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

   Di lain pihak, dapat ditunjukkan bahwa $X = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ adalah barisan turun. Karena $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ adalah barisan turun dan 0 adalah batas bawah himpunan $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N}\right\}$, maka ia konvergen ke suatu $x \in \mathbb{R}$.

Karena $X = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ konvergen ke x . Teorema 6 berakibat bahwa $X . X = \left(\frac{1}{n}\right)$ konvergen ke x^2 . Karena $\left(\frac{1}{n}\right)$ konvergen ke 0, maka $x^2 = 0$ dan berakibat $x = 0$.

Sehingga

$$\lim\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \inf\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N}\right\} = 0$$

3. Misalkan $Y = (y_n)$ didefinisikan secara induktif sebagai berikut :

$y_1 = 1, y_{n+1} = \frac{1}{4}(2y_n + 3)$ untuk $n \geq 1$.

Selidiki apakah barisan $Y = (y_n)$ konvergen atau tidak dan jika konvergen, dapatkan $\lim\ Y$.

Jawab :

Perhatikan observasi berikut :

$$n = 1 \Rightarrow y_2 = \frac{1}{4}(2y_1 + 3) = \frac{1}{4}(2.1 + 3) = \frac{5}{4} < 2$$

$$n = 2 \Rightarrow y_3 = \frac{1}{4}(2y_2 + 3) = \frac{1}{4}\left(2.\frac{5}{4} + 3\right) = \frac{11}{8} < 2$$

$$n = 3 \Rightarrow y_4 = \frac{1}{4}(2y_3 + 3) = \frac{1}{4}\left(2.\frac{11}{8} + 3\right) = \frac{23}{16} < 2$$

Observasi di atas memberikan petunjuk kepada kita bahwa $y_n < 2$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dan $y_n < y_{n+1}$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Selanjutnya, kita perlu membuktikan bahwa $y_n < 2$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ (gunakan induksi matematika).

$n = 1 \Rightarrow y_1 = 1 < 2$

$n = 2 \Rightarrow y_2 = \frac{1}{4}(2y_1 + 3) = \frac{1}{4}(2.1 + 3) = \frac{5}{4} < 2$

Untuk $n = k$, misalkan $y_k < 2$. Maka

$$y_{k+1} = \frac{1}{4}(2y_k + 3) < \frac{1}{4}(4 + 3) = \frac{7}{4} < 2$$

Oleh karena itu $y_n < 2$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Sekarang akan ditunjukkan dengan induksi bahwa $y_n < y_{n+1}$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

$$n = 1 \Rightarrow 1 = y_1 < y_2 = \frac{5}{4}$$

Untuk $n = k$, misalkan $y_k < y_{k+1}$. Maka $2y_k + 3 < 2y_{k+1} + 3$, dan ini berakibat bahwa

$$y_{k+1} = \frac{1}{4}(2y_k + 3) < \frac{1}{4}(2y_{k+1} + 3) = y_{k+2}$$

Sehingga $y_k < y_{k+1}$ berimplikasi bahwa $y_{k+1} < y_{k+2}$. Oleh karena itu

$y_n < y_{n+1}$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Kita perlihatkan bahwa barisan $Y = (y_n)$ naik dan terbatas di atas oleh 2. Teorema konvergensi monoton berakibat bahwa Y konvergen ke suatu bilangan dengan nilai paling besar adalah 2. Dalam kasus ini, tidak mudah mengevaluasi $\lim(y_n)$ dengan menghitung $\sup\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Namun demikian ada cara lain untuk mengevaluasi limit ini. Karena $y_{n+1} = \frac{1}{4}(2y_n + 3)$

untuk semua $n \in \mathbb{N}$, maka suku ke n dalam ekor ke 1 dari Y, yakni Y_1, mempunyai relasi aljabar dengan suku ke n dari Y. Karena $y = \lim Y_1 = \lim Y$, maka dengan Teorema 3 didapatkan

$y = \frac{1}{4}(2y + 3)$, dan berakibat bahwa $y = \frac{3}{2}$.

4. Misalkan

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$$

Karena

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n+1} > x_n,$$

kita melihat bahwa (x_n) adalah barisan naik.

Berdasarkan Teorema Konvergensi Monoton, kovergensi barisan (x_n) tergantung pada apakah barisan (x_n) terbatas atau tidak.

Dengan bantuan komputer dapat ditunjukkan secara aproksimasi bahwa

$x_n = 11{,}4$ untuk $n = 50.000$ dan $x_n = 12{,}1$ untuk $n = 100.000$ yang mengindikasikan bahwa barisan (x_n) tak terbatas.

Dapat diperiksa bahwa :

$$x_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}$$

$$= 1 + \frac{n}{2}$$

Fakta ini memperlihatkan bahwa barisan (x_n) tak terbatas, dan oleh karena itu (x_n) divergen.

B. Perhitungan Akar Kuadrat

Contoh :

Misalkan $a > 0$, kita akan mengkonstruksi suatu barisan (s_n) yang konvergen ke $\sqrt{a}$.

Misalkan $s_1 > 0$ sebarang, dan definisikan

$s_{n+1} = \frac{1}{2}\left(s_n + \frac{a}{s_n}\right)$ untuk $n \in \mathbb{N}$.

Sekarang kita tunjukkan bahwa barisan (s_n) konvergen ke $\sqrt{a}$. (Proses menghitung akar kuadrat dengan cara ini dikenal pada masa Mesapotamia 1500 tahun sebelum Masehi). Terlebih dahulu kita tunjukkan bahwa $s_n^2 \geq a$ untuk $n \geq 2$. Karena s_n memenuhi persamaan kuadratik $s_n^2 - 2_{s_{n+1}s_n} + a = 0$, persamaan ini mempunyai suatu akar Real. Sehingga diskriminan $4s_{n+1}^2 - 4a$ haruslah non negatif, yaitu $s_{n+1}^2 \geq a$ untuk $n \geq 1$. Untuk memperlihatkan bahwa barisan (s_n) turun secara bergantian, periksa bahwa untuk $n \geq 2$ kita mempunyai

$$s_n - s_{n+1} = s_n - \frac{1}{2}\left(s_n + \frac{a}{s_n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(s_n^2 - a)}{s_n} \geq 0$$

Sehingga $s_{n+1} \leq s_n$ untuk semua $n \geq 2$. Teorema konvergensi monoton berakibat bahwa $s = \lim\,(s_n)$ ada. Selain itu, Teorema 6 berakibat bahwa s mestilah memenuhi relasi $s = \frac{1}{2}\left(s + \frac{a}{s}\right)$

dan ini berakibat bahwa $s = \frac{a}{s}$ atau $s^2 = a$. Sehingga $s = \sqrt{a}$.

C. SOAL LATIHAN BARISAN MONOTON

1. Diberikan $x_1 > 1$ dan $x_{n+1} := 2 - \frac{1}{x_n}$ untuk $n \in \mathbb{N}$, tunjukkan bahwa (x_n) terbatas dan monoton. Carilah nilai limitnya.
2. Diberikan $x_1 \geq 2$ dan $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n - 1}$. Tunjukkan bahwa (x_n) turun dan terbatas ke bawah oleh 2. Carilah nilai limitnya.
3. Diberikan $A \subset \mathbb{R}$ tak berhingga yang terbatas keatas dan misalkan
   $u := \sup A$. Tunjukkan bahwa terdapat barisan naik (x_n) dengan $x_n \in A$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ sedemikan hingga $u = lim(x_n)$.
4. Tentukan apakah barisan (y_n) konveregen atau divergen, dengan

$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$ untuk $n \in \mathbb{N}$.

5. Diberikan $x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Buktikan bahwa (x_n) naik dan terbatas, sehingga (x_n) konveregen. (*Petunjuk* jika $k \geq 2$, maka
   $\left(\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$.
6. Tentukan konvergensi dan hitunglah limit barisan berikut.
   (a) $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$
   (b) $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}\right)$
   (c) $\left(\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n}\right)$
   (d) $\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}\right)$

BAB IX

SUB BARISAN DAN TEOREMA BOLZANO WEIERSTRASS

A. Sub Barisan dan Teorema Bolzano-Weierstrass

Dalam bagian ini kita akan memperkenalkan gagasan sub barisan dari suatu barisan bilangan Real. Gagasan ini lebih umum dari ekor barisan, dan sering digunakan untuk memeriksa divergensi suatu barisan. Kita juga akan membuktikan Teorema Bolzano-Weierstrass yang akan digunakan untuk mendapatkan sejumlah hasil berikutnya.
Defnisi 7 Misalkan$X = (X_n)$ adalah barisan bilangan Real dan $r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots$
adalah barisan naik terbatas. Maka barisan X' yang diberikan oleh $(x_{r_1}; x_{r_2}; x_{r_3};\ldots; x_{r_n}; \ldots)$ disebut sub barisan dari X. Sebagai contoh, perhatikan barisan berikut $X = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots .\right)$
Maka beberapa subbarisnya adalah
$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n+2}, \ldots\right)$,
$\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n-2}, \ldots\right)$,
$\left(\frac{1}{2!}, \frac{1}{4!}, \ldots, \frac{1}{(2n)!}, \ldots\right)$.
Barisan-barisan berikut bukan sub barisan dari $X = \frac{1}{n}$
$\left(2,1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$,$\left(1,0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5} \ldots\right)$
Tentu saja sebarang ekor dari suatu barisan adalah sub barisan. Dalam kenyataannya, ekor ke m akan berkaitan dengan indeks:
$r_1 = m + 1$, $r_2 = m + 2, \ldots r_n = m + n$, Sebaliknya tidak setiap sub barisan merupakan suatu ekor barisan tersebut. Berikut ini kita tunjukkan bahwa sub barisan dari suatu barisan konvergen juga konvergen ke limit yang sama.
Theorem 15 Jika suatu barisan $X = (x_n)$ konvergen ke x, maka sebarang sub barisan dari X juga konvergen ke x
Bukti. Misalkan (x_n) konvergen ke x dan (x_{r_n}) adalah sub barisan sebarang dari (x_n). Akan dibuktikan bahwa sub barisan (x_{r_n}) juga konvergen ke x. Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena (x_n) konvergen ke x,maka ada $K(\varepsilon) \in N$ sedemikian sehingga
$n \geq K(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$; Karena $r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots$ adalah suatu barisan naik, dengan menggunakan induksi matematika mudah membuktikan bahwa $r_n \geq n$. Sehinggajika $n \geq K(\varepsilon)$ kita juga mempunyai$r_n \geq n \geq K(\varepsilon)$) $\Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$Oleh karena itu sub barisan (x_{r_n}) juga konvergen ke x.

Tambahan: Akan dibuktikan bahwa $r_n \geq n \; \forall \; n \in N$. Jelas bahwa $r_1 \geq 1$.
Misalkan $r_k \geq k$ untuk suatu $k \in N$.
Akan dibuktikan bahwa $r_{k+1} \geq k + 1$.
Bukti:
Karena $r_k \in N$ dan $r_k < r_{k+1}$ untuk k = 1, 2, ... maka $r_{k+1} \geq r_{k+1}$.
Akibatnya$r_{k+1} \geq r_{k+1} \geq k + 1$
yang menunjukkan bahwa $r_n \geq n \; \forall \; n \in N$
Contoh (a). $\lim (b^n) = 0$ jika $0 < b < 1$:
Contoh ini telah kita buktikan menggunakan ketaksamaan Bernoulli.
Secara alternatif, karena $0 < b < 1$; maka
$x_{n+1} = b_{n+1} < b^n = x_n$

sedemikian sehingga barisan (x_n) adalah turun. Jelas bahwa $0 \geq xn \geq 1$,jadi Teorema Konvergensi Monoton berakibat bahwa barisan adalah konvergen. Misalkan $x = \lim (x_n)$: Karena (x_{2n}) adalah sub barisan dari (x_n) ;

Teorema 14 (teorema konvergensi monoton) berakibat bahwa $x = \lim (x_{2n})$: Di lain pihak, relasi $x_{2n} = b^{2n} = (b^n)^2 = (x_n)^2$
dan Teorema 6 berakibat bahwa $x = \lim (x_{2n}) = (\lim (x_n))^2 = x^2$. Oleh karena itu, haruslah x = 0 atau x = 1. Karena barisan (x_n) turun danterbatas di atas oleh b < 1, kita menyimpulkan bahwa x = 0.

Contoh (b). Lim ($c^{\frac{1}{n}}$)= 1 untuk c > 1:

Limit ini telah diperoleh dalam contoh 1.1(d) untuk c > 0.Disini kita berikan hampiran alternatif untuk kasus c > 1. Jika $z_n = c^{\frac{1}{n}}$maka z_n> 1 dan
z_{n+1}< z_n untuk semua n ∈ N. Teorema Konvergensi Monoton berakibat bahwa $z = \lim (z_n)$ ada. Teorema 14 berakibat bahwa $z = \lim (z_{2n})$: Di lain pihak, dari relasi
$z_{2n} = c^{\frac{1}{2n}} = (c^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{2}} = z_n^{\frac{1}{2}}$
dan Teorema 11, kita mempunyai
$z = \lim (z_{2n}) = (\lim (z_n)^{\frac{1}{2}}) = z_n^{\frac{1}{2}}$
Oleh karena itu kita mempunyai $z^2 = z$, dan ini berakibat z = 0 atau z = 1
Karena z_n> 1 untuk semua n ∈ N, kita menyimpulkan bahwa z = 1. Penggunaan sub barisan dapat mempermudah uji divergensi suatu barisan seperti yang akan kita lihat berikut ini

Theorem 16 Kriteria Divergensi: Untuk barisan $X = (x_n)$,pernyataan berikut ekivalen :

1. (i). Barisan $X = (x_n)$ tidak konvergen ke x ∈ R.
2. (ii). Ada suatu $\varepsilon_0 > 0$ sedemikian sehingga untuk sebarang k ∈ N ada r_k∈ N sedemikian sehinggark ≥ k dan $|x_{rk} - x| \geq \varepsilon_0$
3. (iii). Ada suatu ε_0> 0 dan suatu sub barisan $X' = (x_{rn})$ dari X sedemikian sehingga
   $|x_{rn} - x| \geq \varepsilon_0$untuk semua n ∈ N.

Bukti. (i)) (ii) Jika $X = (x_n)$ tidak konvergen ke x, maka untuk suatu ε_0> 0 kita bisa mendapatkan K (ε) ∈ N sedemikian sehingga Teorema 2(c) berlaku, yaitu untuk sebarang k∈N tidak benar bahwa untuk semua n ≥ k, ketaksamaan $|x_n - x| < \varepsilon_0$. Dengan kata lain, untuk setiap k ∈ N ada suatudari x.

Contoh (a). Barisan $((-1)^n)$ adalah divergen.

Jika barisan $((-1)^n)$ konvergen ke suatu bilangan x, maka setiap sub barisan dari X haruslah konvergen ke x. Karena ada sub barisan yang konvergen ke (+1) dan ada sub barisan yang konvergen ke (-1),maka kita menyimpulkan bahwa X haruslah divergen.
Contoh (b). Barisan$\left(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \dots\right)$adalah divergen.

Defnisikan barisan ini dengan $Y = (y_n)$, dimana y_n = n jika n ganjil, dan $y_n = 1/n$ jika n genap. Mudah dilihat bahwa barisan ini tak terbatas, sehingga
tidak mungkin konvergen.

Contoh (c). Tunjukkan bahwa barisan (n sin n) divergen.
Bukti.
Akan dibuktikan bahwa barisan (n sin n) divergen, dengan menggunakan kriteria divergensi, yaitu dengan menunjukkan ada ε_0> 0 dan ada sub barisan
X' = (sin n_k) dari (sin n) sedemikian sehingga
$\forall c \in R$ berlaku $|\sin n_k - c| \geq \varepsilon_0 \forall k \in N$

Perhatikan bahwa $\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, dan $\frac{1}{2} < \sin x \leq 1$ untuk $x \in I_1 = (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$. Karena panjang interval $I_1 = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} > 2$, maka ada sekurang-kurangnya dua buah bilangan asli yang berada dalam I_1, dan sebutlah salah satunya n_1; sedemikian sehingga $\frac{1}{2} < \sin n_1 \leq 1$. Dengan cara yang sama, untuk setiap $k \in N$ berlaku $\sin x > \frac{1}{2}$ untuk $x \in I_k = \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi(K-1), \frac{5\pi}{6} + 2\pi(K-1)\right)$

Karena panjang interval, $I_k = \frac{5\pi}{6} + 2\pi(K-1) - \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi(K-1)\right) = \frac{3\pi}{2} > 2$

maka ada sekurang-kurangnya dua buah bilangan asli yang berada dalam I_k, dan sebutlah salah satunya n_k, sedemikian sehingga $\frac{1}{2} < \sin n_k \leq 1$. Misalkan $X' = (\sin n_k)$ adalah sub barisan dari $(\sin n)$ yang diperoleh dengan cara di atas, dan jelas bahwan nilai-nilai dari sub barisan $(n_k \sin n_k)$ berada dalam $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Dengan cara yang sama, jika $k \in N$ dan J_k adalah interval $J_k = \left[\frac{7\pi}{6} + 2\pi(k-1), \frac{11\pi}{6} + 2\pi(k-1)\right]$

maka $\sin x < -\frac{1}{2}$ $\forall x \in J_k$ dan panjang $J_k = \frac{2\pi}{3} > 2$. Akibatnya, adasekurang-kurangnya dua buah bilangan asli yang berada dalam J_k, dan sebutlah salah satunya m_k, sedemikian sehingga $-1 < \sin m_k \leq -\frac{1}{2}$ Misalkan $X'' = (\sin m_k)$ adalah sub barisan dari $(\sin n)$ yang diperoleh dengan cara di atas, dan jelas bahwa nilai-nilai sub barisan $(m_k \sin m_k)$ berada dalam $\left[-\infty, \frac{1}{2}\right]$ Misalkan $c \in R$ sebarang, maka sekurang-kurangnya satu dari sub barisan X' dan X" akan memenuhi $|\sin p_k - c| \geq \frac{1}{2}$ untuk p = m atau n. Oleh karena itu tidak mungkin $\lim(\sin p_k) = c$: Karena $c \in R$ sebarang, maka dapat disimpulkan bahwa barisan $(n \sin n)$ divergen.

4.1 Eksistensi Sub Barisan Monoton

Sebelum ini kita telah melihat bahwa tidak setiap barisan merupakan barisan monoton. Sekarang kita akan tunjukkan bahwa setiap barisan mempunyaisub barisan monoton.

Theorem 17 Teorema Sub Barisan Monoton: Setiap barisan bilangan Real $X = (x_n)$ mempunyai sub barisan yang monoton.

Bukti.

Untuk tujuan pembuktian ini, kita defnisikan istilah yang berikut:

suku ke m, yakni x_m, dikatakan puncak dari barisan (x_n) jika $x_m \geq x_n$ untuk semua $n \in N$ dengan $m \geq n$: Pertimbangkan 2 kasus yang bergantung pada apakah X mempunyai tak hingga banyaknya puncak, atau berhingga banyaknya puncak.

Kasus 1. X mempunyai tak hingga banyaknya puncak. Dalam kasus ini, kita urutkan puncak dengan meningkatkan subskrip. Sehingga kita mempunyaipuncak $x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mk}\ldots.$ dimana $m_1 < m_2 < \ldots < m_k < \ldots$, Karena setiap suku adalah puncak, kita mempunyai

$x_{m1} \geq x_{m2} \geq \ldots \geq x_{mk} \geq \ldots.$

Sehingga sub barisan puncak (x_{mk}) adalah sub barisan turun dari X.

Kasus 2. X mempunyai berhingga (mungkin 0) banyaknya puncak. Mis-

alkan puncak-puncak ini adalah $x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mr}$. Misalkan $s_1 = m_r + 1$ (indeks pertama diluar puncak terakhir). Karena x_{s1} bukan puncak, ada $s_2 > s_1$ sedemikian sehingga $x_{s1} < x_{s2}$. Karena x_{s2} bukan puncak, ada $s_3 > s_2$ sedemikian sehingga $x_{s2} < x_{s3}$. Jika kita teruskan cara ini, kita

mendapatkan sub barisan naik (x_{sn}) dari X.

Sekarang kita akan menggunakan Teorema Sub Barisan monoton untuk membuktikan Teorema Bolzano-Weierstrass, yang menyatakan bahwa setiap barisan terbatas mempunyai sub barisan konvergen.

Theorem 18 Teorema Bolzano - Weierstrass

Setiap barisan terbatas mempunyai sub barisan konvergen.

Bukti.

Bukti teorema ini dibuat dengan dua cara.

(1). Teorema Sub Barisan Monoton berakibat bahwa jika $X = (x_n)$ barisan terbatas, maka ia mempunyai sub barisan $X' = (x_{sn})$ yang monoton. Karena sub barisan ini juga terbatas, maka Teorema Konvergensi Monoton berakibat bahwa sub barisan tersebut juga konvergen.

(2). Karena himpunan $\{x_n : n \in N\}$ adalah terbatas, himpunan ini termuat dalam suatu interval $I_1 = [a; b]$: Kita ambil $n_1 = 1$: Sekarang kita bagi I_1menjadi dua sub interval yang sama $I'1$dan $I''\ 1$; dan bagi himpunan $\{n : n > 1\}$ menjadi 2 bagian:

$A_1 = \{n \in N : n > n_1; x_n \in I'_1\}$, $B_1 = \{n \in N : n > n_1, x_n \in I''_1\}$.

Jika A_1 tak hingga, kita ambil $I_2 = I'_1$dan misalkan $n_2$adalah bilangan asli terkecil dalam A_1: Jika A_1 himpunan hingga, maka B_1haruslah tak hingga, dan ambil $I_2 = I''_1$ dan misalkan n_2 menjadi bilangan asli terkecil dalam B_1. Sekarang kita bagi I_2 menjadi dua sub interval yang sama I'_2dan I''_2 dan bagihimpunan $\{n : n > n_2\}$ menjadi 2 bagian:

$A_2 = \{n \in N : n > n_2; x_n \in I'_2\}$, $B_2 = \{n \in N : n > n_2, x_n \in I''_2\}$.

Jika A_2 tak hingga, kita ambil $I_3 = I'_2$dan misalkan $n_3$adalah bilangan asli terkecil dalam A_2. Jika A_2 himpunan hingga, maka B_2haruslah tak hingga, dan kita ambil $I_3 = I''\ _2$ dan misalkan n_3 adalah bilangan asli terkecil dalam B_2. Kita teruskan cara ini untuk mendapatkan suatu barisan interval tersambung (tersarang) $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_k \supseteq \ldots$

dan suatu sub barisan (x_{nk}) dari X sedemikian sehingga $x_{nk} \in I_k$untuk $k \in N$. Karena panjang I_k sama dengan$\frac{b-a}{2^{k-1}}$; Teorema 2.6.2 (lihat Bartle,1994; hal:55) berakibat bahwa ada titik persekutuan (tunggal) $\xi \in I_k$ untuksemua $k \in N$. Selain itu karena x_{nk} dan ξ berada dalam I_k, kita peroleh $|x_{nk} - \xi| \leq \frac{b-a}{2^{k-1}}$

dan ini berakibat bahwa sub barisan (x_{nk}) dari X konvergen ke ξ.

Teorema 17 kadang-kadang disebut Teorema Bolzano-Weierstrass untuk barisan, (karena ada versi lain teorema ini yaitu untuk himpunan terbatas dalam R).

Telah dilihat bahwa suatu barisan terbatas dapat mempunyai bermacam-macam sub barisan yang konvergen ke limit yang berbeda. Umpamanya, barisan $((-1)^n)$ mempunyai sub barisan yang konvergen ke -1 dan sub barisan lain yang konvergen ke 1, dan juga sub barisan yang tidak konvergen.

Theorem 19 Misalkan X adalah barisan bilangan Real terbatas dan misalkan $x \in R$ mempunyai sifat bahwa setiap sub barisan konvergen dari X adalah konvergen ke x. Maka barisan X konvergen ke x.

Bukti.

Misalkan X adalah barisan bilangan Real terbatas, maka ada M >0 sedemikian sehingga $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in N$. Andaikan barisan Xtidak konvergen ke x. Kriteria Divergensi berakibat bahwa ada suatu $\varepsilon_0 > 0$ dan suatu sub barisan $X' = (x_{rn})$ dari X sedemikian sehingga $|x_{rn} - x| \geq \varepsilon_0$untuk semua $n \in N$. (#)

Karena X' adalah suatu sub barisan dari X, maka M juga suatu batas untuk X'. Sehingga Teorema BolzanoWeierstrass berakibat bahwa X'mempunyai sub barisan konvergen X". Karena X" juga sub barisan dari X,maka ia juga konvergen ke x. Akibatnya, ia berada dalam lingkungan $\varepsilon_0$dari x: Karena setiap suku dari X" juga suatu suku dari X', maka ini kontradiksi dengan (#).

BAB X

BARISAN CAUCHY BILANGAN REAL

Barisan Cauchy

Definisi 2.5.1

Barisan bilangan real $X = (X_n)$ disebut **barisan Cauchy** jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ $terdapat H(\varepsilon) \epsilon R$ sedemikian hingga untuk setiap $n, m \epsilon R$ $dengan$ $n, m \geq H(\varepsilon), berlaku |x_n - x_m| < \varepsilon.$

Contoh 2.5.2

Barisan$\left(\frac{1}{n}\right)$ merupakan Barisan Cauchy

Jikadiberikan $\varepsilon > 0$, dapat dipilih $H = H(\varepsilon) \epsilon \mathbb{N} sedemikianhinggaH > \frac{2}{\varepsilon}$. Maka jika $n, m \geq H diperoleh \frac{1}{n} \leq \frac{1}{H} < \frac{\varepsilon}{2}$ dan dengan cara yang sama diperoleh $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Oleh karena itu, jika $n, m \geq H(\varepsilon)$, maka $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Karenaberlakuuntuksebarang $\varepsilon > 0$, maka dapat disimpulkan bahwa $\left(\frac{1}{n}\right)$ merupakan barisan Cauchy.

Lemma 2.5.3

Jika$X = (X_n)$ barisan bilangan real yang konvergen, maka X merupakan barisan Cauchy.

Bukti

Misalkan$x := Lim X$. Diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat $K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \epsilon \mathbb{N}$ sedemikian hingga jika $n \geq K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ maka $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Oleh karena itu jika $H(\varepsilon) := K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ dan jika $n, m \geq H(\varepsilon)$, maka diperoleh :

$|x_n - x_m| = |(x_n - x) + (x - x_m)|$

$= |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Karenaberlakuuntuksebarang $\varepsilon > 0$, maka terbukti bahwa (X_n)barisan Cauchy.

Lemma 2.5.4

Jika$X = (X_n)$ barisan Cauchy, maka X terbatas

Bukti

Diketahui$X = (X_n)$ barisan Cauchy. Diberikan $(\varepsilon) := 1$ $jika H := H(1) dan n \geq H$,maka $|x_n - x_H| < 1$. Selanjutnya menggunakan ketaksamaan segitiga diperoleh$|x_n| \leq |x_H| + 1$ untuk semua $n \epsilon \mathbb{N}$namakan :

$M := \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots., |x_{H-1}|, |x_H| + 1\}$, maka diperoleh $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \epsilon \mathbb{N}$. Jadi terbukti bahwa X terbatas.

Teorema 2.5.5. (Kriteria Konvergensi Cauchy). Barisan bilangan real $X = (X_n)$konvergen jika dan hanya jika$X = (X_n)$ barisan Cauchy.

Bukti

Jelas Lemma 2.5.3

Diketahui$X = (X_n)$ barisan Cauchy. Diambil $\varepsilon > 0$, maka terdapat $H = H(\varepsilon) > 0$ sedemikian hingga untuk setiap $n, m \epsilon \mathbb{N} dengan n, m \geq H$ berlaku $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. karena X barisan Cauchy, maka X terbatas, sehingga X memuat barisan bagian $X' = (x_{nk}) yang konvergen ke x*$. Oleh karena itu, terdapat $K \geq H dengan K \epsilon \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$ Sedemikian hingga $|x_K - x*| < \frac{\varepsilon}{2}$. akibatnya untuk m = K diperoleh

$|x_n - x*| = |x_n - x_K + x_K - x*|$

$\leq |x_n - x_K| + |x_K - x*|$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka terbukti bahwa barisan $X = (X_n) konvergen.$

Defenisi 2.5.6 barisanbilangan real $X = (x_n)$ dikatakan kontraktif jika terdapat C, dengan 0<C<1 sedemikian hingga . $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C|x_{n+1} - x_n|$ Untuk semua $n \epsilon R$. Bilangan C disebut konstan dari barisan kontraktif.

Teorema 2.5.7 Setiap barisan kontraktif merupakan barisan Cauchy, dan konvergen.

Akibat 2.5.8 jika $X = (x_n)$ barisan kontraktif dengan konstan C, 0<C<1 dan jika $x_* = \lim X, maka$:

1. $|x_* - x_n| \leq \frac{C^{n-1}}{1-C}|x_2 - x_1|$
2. $|x_* - x_n| \leq \frac{C}{1-C}|x_n - x_{n-1}|$

2.6 Sifat Barisan Divergen

Pada subbab ini diberikan beberapa sifat dari suatu barisan bilangan real (x_n) yang mendekati atau menuju ke $\mp\infty$ yaitu lim (x_n) = $+\infty$ dan lim (x_n) = $-\infty$. ingat bahwa barisan divergen adalah barisan yang tidak konvergen.

Definisi 2.6.1. diberikan barisan bilangan real (x_n)

1. Barisan (x_n) dikatakan mendekati $+\infty$,ditulis lim (x_n) = $+\infty$, jika untuk setiap $\alpha \epsilon \mathbb{R}$ terdapat k$(\alpha)\epsilon$ $\mathbb{N}$ sedemikian hingga jika n $\geq$ k(α),maka x_n>α
2. Barisan (x_n) dikatakan mendekati $-\infty$,ditulis lim (x_n) = $-\infty$, jika untuk setiap $\beta \epsilon$ $\mathbb{R}$ terdapat k$(\beta)\epsilon$ $\mathbb{N}$ sedemikian hingga jika n $\geq$ k(α),maka x_n>β

Barisan (x_n) dikatakan divergen proper (tepat/tegas) jika lim (x_n) = $+\infty$ atau lim (x_n) = $-\infty$. Berikut ini diberikan contoh bahwa lim n^2 = $+\infty$

Contoh 2.6.2 lim n^2 = $+\infty$. Jika k$(\varepsilon)\epsilon$ $\mathbb{N}$ sedemikian hingga k(α)>α , dan jika n $\geq$k(α), maka diperoleh n^2 $\geq$ n >α

Teorema 2.6.3 barisan bilangan real monoton merupakan barisan divergen proper jika dan hanya jika barisannya tidak terbatas.

a) Jika (x_n) barisan naik tak terbatas,maka lim (x_n) = $+\infty$
b) Jika (x_n) barisan turun tak terbatas,maka lim (x_n) = $-\infty$

Bukti

a) Misalkan (x_n) barisan naik jika (x_n) terbatas, maka (x_n) konvergen. Jika (x_n) tidak terbatas, maka untuk sebarang $\alpha \in$ $\mathbb{R}$ terdapat n(α) $\in \mathbb{N}$ sedemikian hingga α<$x_{n(\alpha)}$ tetapi karena (x_n) naik, diperoleh α<x_n untuk semua n $\geq$ n (α),karena α sebarang, maka diperoleh bahwa lim (x_n) = $+\infty$
b) Bukti hampir sama dengan (a).

Teorema 2.6.4 diberikan barisan bilangan real (x_n) dan (y_n), dengan $x_n \leq y_n$ untuk semua n $\in$ R

a) Jika lim (x_n) = $+\infty$, maka lim (y_n) = $+\infty$
b) Jika lim (x_n) = $-\infty$, maka lim (y_n) = $-\infty$

Bukti.

a) Jika lim (x_n) = $+\infty$ dan jika diberikan $\alpha \in \mathbb{R}$, maka terdapat k$(\alpha) \in R$ sedemikian hingga jika n $\geq$ k (α), maka $\alpha < x_n$, karena diketahui x_n dan y_n untuk semua n $\in$ R maka α< y, untuk semua n $\geq$ k (α). Karena α sebarang maka lim (x_n) = $+\infty$

b) Bukti hampir sama dengan (a)

Teorema 2.6.5. diberikan barisan bilangan real x_n dan y_n dan untuk suatu $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$ diperoleh

Lim $\left[\frac{x_n}{y_n}\right] = L$

Bukti. Diketahui Lim $\left[\frac{x_n}{y_n}\right] = L$,artinya terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap n $\geq k$ berlaku

$\frac{1}{2}L < \frac{x_n}{y_n} < \frac{3}{2}L$

Oleh karena itu,diperoleh $\left(\frac{1}{2}L\right) y_n < x_n < \left(\frac{3}{2}L\right) y_n$ untuk semua $n \geq k$ sehingga menggunakan teorema 2.6.4 teorema terbukti.

2.7 deret tak hingga

Berikut ini diberikan pengantar singkat mengenai suatu **deret tak berhingga** dari bilangan real

Defenisi 2.7.1 jika $X = (x_n)$ barisan di $\mathbb{R}$, maka deret tak berhingga (cukup disebut deret) yang terbentuk oleh X adalah barisan S = (s_k) yang didefisikan dengan

$s_1 = x_1$

$s_2 = s_1 + x_2 = (x_1 + x_2)$

$s_k = s_{k-1} + x_2 = (x_1 + x_2 \ldots + x_k)$

x_n disebut **terms** dari deret dan s_k disebut **jumlahan parsial (partial sum)** jika lim S ada, maka deret S dikatakan **konvergen** dan nilai limitnya adalah hasil dari jumlahan deret. Jika limitnya tidak ada,maka dikatakan deret s **divergen.**

Deret tak berhingga S yang dibangun oleh barisan $X = (x_n)$ disimbolkan dengan $\sum(x_n)$ atau $\sum x_n$ atau $\sum_{n=1}^{-} x_n$

Contoh 2.7.2

Diberikan barisan X = $(r^n)\infty_{n=1}$ dengan r $\in \mathbb{R}$ yang membangun deret

$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \ldots r^n + \ldots$

Akan ditunjukkan bahwa jika |r| < 1, maka deret ini konvergen ke $\frac{1}{(1-r)}$

Misalkan $s_n = 1 + r + r^2 + \ldots r^n + \ldots$ untuk n $\geq$ 0. Dan jika s_n dikalikan dengan r mengurangkan hasilnya dari s_n, maka diperoleh

$s_n = (1-r) = 1 - r^{n+1}$

Oleh karena itu,diperoleh

$s_n = \frac{1}{1-r} = \frac{r^{n+1}}{1-r}$

Sehingga

$\left|s_n - \frac{1}{1-r}\right| \leq - \frac{|r|^{n+1}}{|1-r|}$

Karena $|r|^{n+1} \to 0$ saat $|r| < 1$, maka deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ konvergen ke $\frac{1}{1-r}$ saat $|r| < 1$

Selanjutnya, diberikan kondisi-kondisi yang dapat memberikan jaminan bahwa suatu deret itu konvergen.

Teorema 2.7.3 (*The nth Term Test*) jika deret $\sum x_n$,konvergen , maka lim (x_n) = 0

Bukti. Menggunakan definisi 2.7.1 $\sum x_n$ konvergen apabila lim (s_k) ada karena $x_n = s_n - s_{n-1}$, maka lim (x_n) = lim (s_n) - lim (s_{n-1}) = 0.

Teorema 2.7.4 (kriteria Cauchy) deret $\sum x_n$ konvergen jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat M $(\varepsilon) \in R$ sedemikian hingga jika m > n $\geq$ M (ε), maka
$|s_m - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m| < \varepsilon$

Teorema 2.7.5 diberikan (x_n) barisan bilangan real nonnegatif. Maka deret $\sum x_n$ konvergen jika dan hanya jika barisan S = (s_k) dari jumlahan parsialnya terbatas.
Dalam hal ini
$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim (s_k) \sup \{s_k : k \in R\}$
Bukti.
karena $x_n > 0$, maka barisan jumlahan parsial S naik monoton, yaitu
$s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_k \leq \cdots$
Menggunakan 2.3.4, barisan S = (s_k) konvergen jika dan hanya jika barisannya terbatas, dalam hal ini limitnta sama dengan sup $\{s_k\}$.

Contoh 2.7.6 deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen
Karena jumlahan parsial nya monoton, maka cukup ditunjukkan bahwa barisan bagian (s_k) terbatas. Jika $k_1 = 2^1 - 1 = 1$, maka s_k = 1. Jika $k_2 = 2^2 - 1 = 3$, maka
$s_{k_2} = \frac{1}{1} + \left[\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right] < 1 + \frac{2}{2^2} = 1 + \frac{1}{2}$,
Dan jika $k_3 = 2^3 - 1 = 7$, maka diperoleh
$s_{k_3} = s_{k_2} + \left[\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right] < s_{k_2} + \frac{4}{4^2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$
Menggunakan induksi matematik, diperoleh bahwa jika $k_1 = 2^1 - 1$, maka
$0 < s_{k_3} < 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}$
Karena ruas kanan merupakan jumlah parsial dari deret geometri dengan r + $\frac{1}{2}$, maka lim $(s_k) = \frac{1}{\left[1-\frac{1}{2}\right]} = 2$. Jadi, deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen

2.7.7 Tes Perbandingan (comparison tests) diberikan barisan bilangan real X = (x_n) dan y=(y_n), dan misalkan untuk suatu $k \in$ R berlaku $0 \leq x_n \leq y_n$ untuk $n \geq k$

a) Jika $\sum y_n$ konvergen, maka $\sum x_n$ konvergen
b) Jika $\sum x_n$ divergen, maka $\sum y_n$ divergen

Bukti.

a) misalkan $\sum y_n$ konvergen diberikan $\varepsilon > 0$ dan $M(\varepsilon) \in$ R sedemikian hingga jika m > n $\geq M(\varepsilon)$, maka
   $y_{n-1} + \ldots + y_m < \varepsilon$

   Jika m > max $\{K, M(\varepsilon)\}$, maka diperoleh bahwa
   $0 \leq x_{n+1} + \ldots + x_m \leq y_{n+1} + \ldots + y_m < \varepsilon$
   Yang berakibat bahwa $\sum x_n$ konvergen.
b) Menggunakan kontraposisi dari (a) maka teorema terbukti.

2.7.8 tes perbandingan limit misalkan X = (x_n) barisan positif naik tegas dan misalkan limit berikut ada dalam $\mathbb{R}$,yaitu
r = lim $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$

a. Jika $r \neq 0$, maka $\sum x_n$ konvergen jika dan hanya jika $\sum y_n$ konvergen
b. Jika $r = 0$, maka $\sum y_n$ konvergen jika dan hanya jika $\sum x_n$ konvergen

Bukti

a. Diketahui r = lim $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ dan dari soal latihan 2.1.10 maka terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk n $\geq$ k berlaku $\frac{1}{2}$ r $\leq \frac{x_n}{y_n} \leq$ 2r sehingga diperoleh

$\left(\frac{1}{2}\ r\right) y_n \ \leq x_n \leq (2r)y_n$. Menggunakan tes perbandingan 2.7.7 dua kali, maka pernyataan (a) terbukti

b. Jika r = 0, maka terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk $n \geq K$ berlaku menggunakan teorema 2.7.7(a), maka pernyataan (b) terbukti.

Contoh 2.7.9. deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}\ konvergen$$

Diketahui kesamaan berikut benar

$$0 < \frac{1}{n^2+n} \ \leq \frac{1}{n^2}\ untuk\ n \in \mathbb{N}$$

Karena telah diketahui deret $\sum_{n=1}^{\infty} \ \frac{1}{n^2}\ konvergen$, maka menggunakan tes perbandingan 2.7.7 diperoleh bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \ \frac{1}{n^2+n}\ konvergen$

Daftar Kepustakaan

1. Bartle, R. G & Sherbeat,D.R. 1994. Introduction to Real Analysis. Jhon Wiley & Sons, Inc : New York.
2. Goldberg, R.R. 1976. Methods of Real Analysis. Jhon Wiley & Sons, Inc : New York.
3. Gupta, SI.at dll. 1974. Fundamental of Real Analysis. Vikas Publhising House PVT. Ltd: New Delhi.
4. Muhafzan. 2009. Pengantar Analisis Real. Unand Press: Padang