

DALIL PYTHAGORAS (Suatu Analisis Proses Pembelajaran di Sekolah)

Usmadi

Universitas Muhammadiyah Sumatera Barat
usmadidtumanggung@gmail.com

Abstract. This writing is talking about Pythagoras theorem, and it head for giving knowledge to educator about history, proof, and Pythagoras theorem's aplication in order to solve mathematic's problem in daily life. At first, the Pythagoras theorem's sound is " in a right triangel, wide amount from each square that formed from perpendicular sides together with wide of square that formed from its hypotenuse". But today its known with " for a right triangel (example ΔACB), apply hypotenuse quadrate same with other quadrate of two sides amount. ($c^2 = a^2 + b^2$).

Key words: Right Triangel, Pythagoras Theorem.

Abstrak. Tulisan ini membahas dalil Pythagoras, dan bertujuan untuk memberikan pengetahuan kepada pendidik tentang sejarah, bukti, dan aplikasi dalil Pythagoras dalam memecahkan masalah matematika dalam kehidupan sehari-hari. Bunyi dalil Pythagoras pada awalnya adalah "dalam suatu segitiga siku-siku, jumlah luas dari masing-masing persegi yang terbentuk dari sisi-sisi yang saling tegak lurus sama dengan luas dari persegi yang terbentuk dari sisi miringnya", namun pada saat ini dalam dunia pendidikan lebih dikenal dengan "untuk sebuah segitiga siku-siku (misalnya ΔACB), berlaku kuadrat hipotenusa sama dengan jumlah kuadrat kedua sisi lainnya ($c^2 = a^2 + b^2$)".

Kata kunci: Segitiga siku-siku, Dalil Pythagoras

PENDAHULUAN

Matematika sekolah tidak sepenuhnya sama dengan matematika sebagai ilmu. Perbedaannya terletak pada ; (a) penyajiannya, (b) pola pikirnya, (c) keterbatasan semestanya, (d) tingkat keabstrakannya (Sudjadi, 2000). Begitupula P. Wijdenes (dalam Sutrisman Murtadho, dkk: 1987) menyatakan bahwa konsep matematika dipelajari dalam enam tahap, yakni: (a) permainan bebas (*free play*), (b) permainan (*games*), (c) mencari persekutuan (*searching for communalities*), (d) penyajian (*representation*), (e) simbolisasi, (f) formalisasi.

Dalam pembelajaran dalil Pythagoras peserta didik dapat membuat simbol tersendiri, akan tetapi pendidik harus dapat menunjukkan simbol yang baik dalam pemecahan masalah, membuktikan dalil, dan dalam menjelaskan konsep dalil Pythagoras. Dalil pythagoras akan lebih mudah diingat jika disajikan dalam bentuk

simbol, misalnya: $c^2 = a^2 + b^2$, daripada disajikan dalam bentuk verbal, yakni “dalam suatu segitiga siku-siku, jumlah luas dari masing-masing persegi yang terbentuk dari sisi-sisi yang saling tegak lurus sama dengan luas dari persegi yang terbentuk dari sisi miringnya”. Salah satu kesulitan jika menggunakan simbol untuk suatu dalil ialah syarat berlakunya suatu dalil tersebut tidak jelas disimbolkan. Seperti dalil Pythagoras di atas jika disajikan dalam bentuk simbol, tidak jelas menyatakan syarat segitiga siku-siku tetapi dengan penyajian verbal dinyatakan dengan jelas. Kejadian ini jugalah yang menyebabkan pengertian dari dalil Pythagoras di sekolah sering terdapat kekeliruan.

Dalam pembelajaran matematika seorang pendidik harus mengurutkan sifat-sifat konsep dan memeriksa akibat-akibatnya. Sifat dasar (struktur) matematika adalah aksioma dan atau dalil dari sistem tersebut. Sifat-sifat yang diturunkan dari suatu dalil adalah dalil yang diikuti oleh buktinya. Dalam tahap formalisasi suatu ilmu, peserta didik dapat memeriksa akibat dari konsep dan menggunakan konsep penyelesaian problematika matematika murni dan terapan.

Berdasarkan permasalahan di atas, maka tulisan ini akan membahas tentang dalil Pythagoras. Diharapkan tulisan ini dapat memberikan pengetahuan, dan kepehaman kepada pendidik tentang dalil Pythagoras, mulai dari sejarah perkembangan, dan bukti dalil Pythagoras berdasarkan geometri Euclide (karena keterbatasan, dalam tulisan ini tidak semua cara bukti dalil Pythagoras dibahas), serta contoh penggunaan dalil Pythagoras dalam memecahkan masalah/problem matematika.

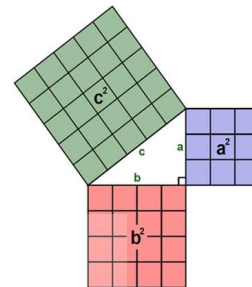
HASIL DAN PEMBAHASAN

Permasalahan utama dalam pembelajaran matematika di pendidikan dasar dan menengah adalah pendidik tidak begitu memahami akan konsep yang terkandung dalam suatu definisi, aksioma/postulat, dalil, dalil akibat atau lemma. Untuk memahami konsep yang ada dalam satu pokok bahasan, maka pendidik harus banyak membaca dan mempelajari suatu konsep tersebut dari berbagai sumber. Ini sejalan dengan keinginan kurikulum tahun 2013 yakni sumber belajar dari suatu proses pembelajaran dapat diambil dari berbagai sumber. Tulisan ini dapat dijadikan sebagai salah satu sumber belajar dalam proses pembelajaran dalil Pythagoras di sekolah. Berikut ini, akan dibahas berturut – turut, yakni:

1. Sejarah Dalil Pythagoras

Awalnya Pythagoras menafsirkan dalil ini sebagai relasi antar luas persegi atau bujur sangkar yang terbentuk di setiap sisi-sisi segitiga siku-siku, yakni: *dalam suatu segitiga siku-siku, jumlah luas dari masing-masing persegi yang terbentuk dari sisi-sisi yang saling tegak lurus sama dengan luas dari persegi yang terbentuk dari sisi miringnya*. Gambarnya adalah seperti berikut ini:

Berdasarkan catatan sejarah, orang-orang di peradaban Babilonia, Mesir, India, bahkan Cina kuno ternyata sudah memiliki pemahaman tentang relasi antar sisi-sisi segitiga siku-siku beberapa ribu tahun sebelum Pythagoras lahir. Salah satu bukti sejarah adalah tablet milik peradaban Babilonia yang memenuhi syarat dalil Pythagoras (*Pythagorean triple*).



Gambar: Interpretasi Dalil Pythagoras Awal
sumber: [Blogspot](#)

2. Dalil Pythagoras

Dalam proses pembelajaran moderen pada saat ini terjadi perubahan dari dalil Pythagoras di sekolah. Pendidik hanya memperkenalkan dalil akibat (lemma) dari dalil Pythagoras dengan simbol $c^2 = a^2 + b^2$, padahal secara verbal dalil Pythagoras itu sendiri adalah “*Luas persegi (bujursangkar) pada sisi miring sebuah segitiga siku-siku sama dengan jumlah luas persegi (bujursangkar) pada kedua sisi siku-siku*”. Pernyataan matematis ini pertama kali dinyatakan oleh Euclid, seorang matematikawan Yunani kuno yang terkenal dengan bukunya berjudul *The Elements*. Kenapa demikian? Karena jika dalil tersebut dinyatakan dalam relasi antara antar panjang setiap sisi-sisi segitiga siku-siku, maka Pythagoras harus berurusan dengan bilangan irasional (bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dimana $b \neq 0$). Jadi, kalau Pythagoras menemukan suatu segitiga yang masing-masing sisinya misalnya adalah 1 dan 1, maka panjang sisi miringnya adalah $\sqrt{2}$. Hal ini akan menyulitkan proses hitung pada saat itu. Karena bilangan rasional baru pertama kali diperkenalkan pada tahun 1525 (2000 tahun lebih setelah Pythagoras lahir) oleh Christoph Rudolff. Jadi, Pythagoras hanya bisa menafsirkan kuantitas bilangan irasional seperti $\sqrt{2}$ dalam geometri saja, yaitu sebagai segmen garis yang terbentuk dari segitiga siku-siku sama kaki. Bahkan Hippasus (± 500 tahun SM) mencoba membuktikan “tidak ada bilangan rasional yang jika dikuadratkan,

maka hasilnya sama dengan dua” atau “tidak ada elemen $r \in Q$ sedemikian sehingga $r^2 = 2$.”

Bukti:

Andaikan ada $r \in Q \ni r^2 = 2$. Jika $r \in Q$ maka r dapat ditulis dalam bentuk $\frac{p}{q}$ dengan p dan q merupakan faktorisasi prima (tidak mempunyai faktor berserikat kecuali dengan 1). Sehingga $(\frac{p}{q})^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$. karena $2q^2$ genap maka p^2 . akibatnya p juga genap. Sebab jika ganjil maka $p = 2m - 1, \forall m \in N$, atau

$p^2 = (2m - 1)^2 = 4m^2 - 4m + 1 = 2(2m^2 - 2m) + 1$. Berarti bahwa p^2 ganjil. jadi p haruslah genap. Karena p genap, maka $p = 2k, \forall k \in N$ sedemikian sehingga $p^2 = (2k)^2 = 4k^2$. berdasarkan diketahui $p^2 = 2q^2$ dan p genap. akibatnya q ganjil. Sebab jika q genap, maka faktor perserikatan p dan q bukan 1. Jadi q harusla ganjil.

Dengan demikian diperoleh $p^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2k^2 = q^2$ yang berarti q genap. Nampak disini timbul kontradiksi bahwa q ganjil. Jadi, pengandaian salah. Dengan demikian yang benar adalah tidak ada $r \in Q \ni r^2 = 2$. Ini jugalah yang menjadi dasar munculnya konsep bilangan irrasional dan perubahan dalil Pythagoras menjadi $c^2 = a^2 + b^2$ seperti sekarang ini. Dengan adanya pemberian simbol yang demikian, muncullah berbagai bentuk tafsiran dari simbol tersebut, bahkan kadang-kadang tidak sesuai pemahaman pendidik dan peserta didik terhadap konsep yang terdapat dalam dalil Pythagoras itu sendiri.

3. Bukti Dalil Pythagoras

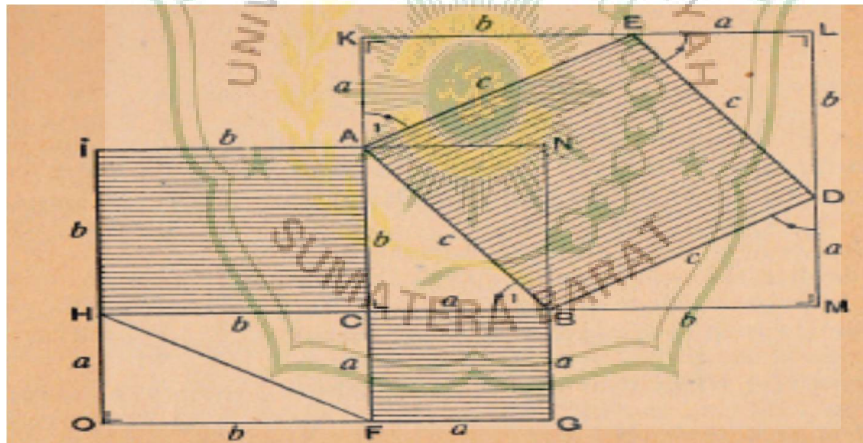
Dalam pembuktian dalil pythagoras ini, perlu kiranya terlebih dahulu kita memahami tentang segitiga siku-siku. Segitiga siku-siku adalah suatu segitiga yang salah sudutnya adalah 90^0 . Misalnya diketahui $\Delta BCA, \sphericalangle C = 90^0$; ABDE, BCFG, dan CHIA adalah persegi yang dibuat pada sisi- sisi ΔBCA disebelah luar segitiga. Luas masing-masing dari persegi adalah c^2, a^2 dan b^2 . Dimana $c^2 = a^2 + b^2$.

Dalam pembuktian dalil Pythagoras, cukup kita buktikan bahwa :
 $c^2 = a^2 + b^2$.

a. Bukti 1 Dalil Pythagoras

Langkah-langkah pembuktian:

- Buat garis melalui titik E yang sejajar dengan BC, memotong garis sisi AC di Titik K.
- Perhatikan, $\angle K = 90^\circ$ dan $\angle A_1 = \angle B_1$.
- Berikutnya perhatikan AE dan AB, karena $AE = AB$, akibatnya $\Delta KEA \cong \Delta CAB$. Jadi $AK = a$ dan $KE = b$.
- Jika garis yang melalui D dan sejajar dengan AC memotong garis sisi BC di M dan KE di L maka dapat dibuktikan analog dengan di atas. Bahwa $\Delta BMD \cong \Delta DLE$ kedua segitiga tersebut sama dan sebangun dengan ΔACB ($\Delta BMD = \Delta DLE \cong \Delta ACB$); Jadi $BM = DL = b$ dan $MD = LE = a$.
- Sehingga CKLM adalah sebuah persegi dengan sisi $a + b$. Perhatikan Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Hubungan Luas Daerah Persegi dengan Panjang sisi-sisi segitiga Siku-Siku
Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa segitiga-segitiga OHF, CFH dan NAB sama dan sebangun dengan ΔBCB . Jadi persegi INGO adalah sebuah persegi pula, dengan sisi $a + b$.

Jadi Luas CKLM = $c^2 + 4 \times$ luas ΔBCA sama dengan

Luas INGO = $a^2 + b^2 + 4 \times$ Luas ΔBCA ,

Karena Luas CKLM = INGO, maka diperoleh,

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ (terbukti).}$$

Selanjutnya IA, GB, IH dan GF diperpanjang, maka terdapat persegi INGO. Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa segitiga-segitiga OHF, CFH dan NAB sama dan sebangun dengan ΔBCB . Jadi persegi INGO adalah sebuah persegi pula, dengan sisi $a + b$.

Jadi Luas CKLM = $c^2 + 4 \times$ luas ΔBCA sama dengan

$$\text{Luas INGO} = a^2 + b^2 + 4 \times \text{Luas } \Delta BCA,$$

Karena Luas CKLM = INGO, maka diperoleh,

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ (terbukti)}$$

b. Bukti 2 Dalil Pythagoras.

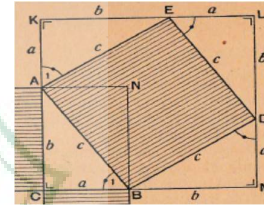
Sesudah dibuktikan bahwa segitiga-segitiga disekitar $c^2 \cong \Delta BCA$. Jadi masing-masing luasnya adalah : Luas ΔBCA

$\frac{1}{2} ab$ dan CKLM ada sebuah persegi dengan sisi $a + b$

Maka dari luas CKLM = $c^2 + 4 \times$ luas ΔBCA diperoleh:

$$(a + b)^2 = c^2 + 2 ab,$$

Sehingga diperoleh $c^2 = a^2 + b^2$ (Terbukti).



Gambar 2

Dalil 2 (Kebalikan dari dalil Pythagoras)

Secara verbal bunyi dalil 2 ini adalah merupakan dalil kebalikan dari dalil Pythagoras, yakni: “Jika dalam sebuah segitiga kuadrat suatu sisi sama dengan jumlah kuadrat – kuadrat kedua sisi yang lain, maka sudut di depan sisi yang pertama tentu siku-siku”.

Bukti:

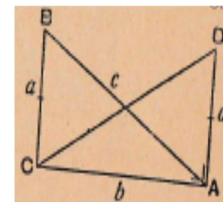
Diketahui ; Misalkan diketahui dalam ΔACB , dan $c^2 = a^2 + b^2$.

Akan dibuktikan $\angle C = 90^\circ$.

Bukti:

Buat di A segmen garis AD tegak lurus pada AC dan sama dengan a; hubungkan D dan C. menurut dalil 2, maka $CD^2 = a^2 + b^2 = c^2$. Sehingga $CD = c$.

Sekarang $\Delta ACB \cong \Delta DAC$, dengan demikian diperoleh $\angle ACB = \angle DAC = 90^\circ$.



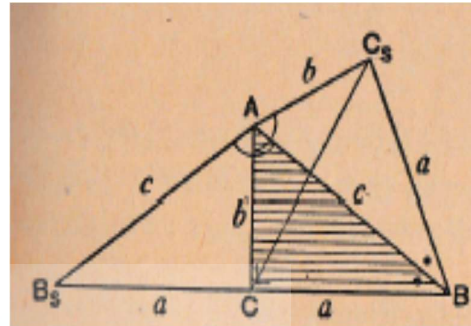
Gambar 3

Dengan menggunakan dalil “Jika dalam sebuah segitiga kuadrat suatu sisi sama dengan jumlah kuadrat – kuadrat kedua sisi yang lain, maka sudut di depan sisi yang pertama tentu siku-siku”. dapat dibentuk sebuah sudut siku-siku pada suatu

lapangan. Untuk keperluan itu diambil sebuah tali yang misalnya panjangnya 12 m, dan dibentuk sebuah segitiga dengan sisi 3 m, 4 m dan 5 m. Sudut di depan sisi 5 m tentu siku-siku, sebab $25^2 = 3^2 + 4^2$.

c. Bukti 3 Dalil Pythagoras

Pada gambar 4 di samping nampak ΔBCA dengan $\gamma = 90^\circ$, ini dicerminkan dalam b , juga dalam c . Sudut-sudut yang mendapat tanda yang



Gambar 4

sama besarnya sama.

sebuah segitiga yang lain, atau menjadi pe-

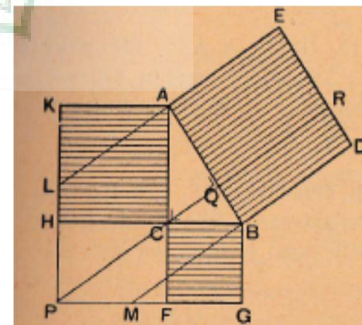
*tadi berbanding sebagai hasil perbanyakan sisi – sisi yang mengapit kedua sudut tadi” menghasilkan: Luas $\Delta BC_s = f a^2$; Luas $\Delta CAC_s = f b^2$; Luas $\Delta ABB_s = f c^2$; segitiga pertama dan segitiga kedua mempunyai sudut yang suplementair (= berjumlah 180°); yang kedua dan ketiga mempunyai sudut yang sama. Tetapi jumlah kedua segitiga yang pertama sama dengan segitiga yang ketiga (masing-masing $2 \times \Delta BCA$); berdasarkan Dalil “*Jika suatu sudut sebuah segitiga sama dengan suatu sudut sebuah segitiga yang lain, atau menjadi pelurus sudut itu, maka luas kedua segitiga tadi berbanding sebagai hasil perbanyakan sisi-sisi yang mengapit kedua sudut itu*” . Jadi berdasarkan dalil itu, dapat disimpulkan bahwa $a^2 + b^2 = c^2$.*

4. Bukti 4 Dalil Pythagoras dapat dilakukan berdasarkan gambar 5 berikut ini.

Diketahui. Berdasarkan Gambar 5.

Disebelah, dimana Luas empat persegi panjang AERQ = Luas Paralelogram ACPL = Luas Persegi ACHK.

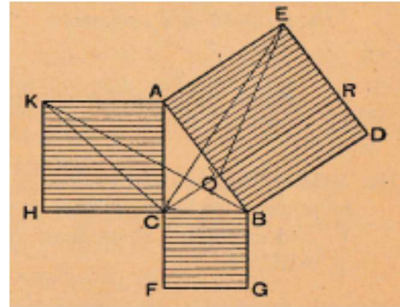
Berdasarkan gambar 5 tersebut dapat dibuktikan



Gambar 5

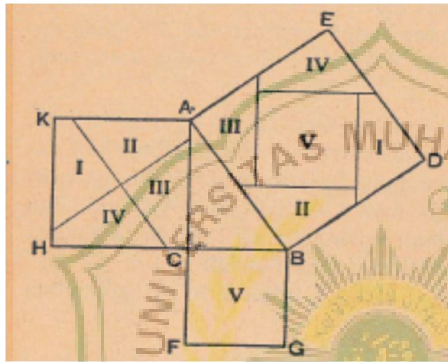
5. Bukti 5 Dalil Pythagoras dapat dilakukan berdasarkan gambar 6 berikut ini.

Diketahui. Berdasarkan Gambar 6.
Disebelah, dimana Luas $\frac{1}{2} AERQ =$
Luas $\Delta AEQ = \Delta AEC \cong \Delta ABK =$
 $\Delta ACK = \frac{1}{2} ACHK$
Berdasarkan gambar 6 tersebut dapat
dibuktikan dalil Pythagoras.



Gambar 6

6. Bukti 6 Dalil Pythagoras dapat dilakukan berdasarkan gambar 7 berikut ini.



Gambar 7

Untuk bukti 4, 5 dan 6 silakan pembaca buktikan berdasarkan gambar yang ada.

C. Aplikasi Dalil Pythagoras

Dalil Pythagoras sangat banyak digunakan dalam memecahkan persoalan matematika; apakah di aljabar, trigonometri, kalkulus dan lain sebagainya. Salah satu aplikasi dalil Pythagoras dapat untuk menentukan rumus luas sebuah segitiga sebarang yang dinyatakan dengan ketiga sisi. Secara verbal dalil tersebut adalah : Luas sebuah segitiga dengan sisi a, b, dan c sama dengan $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$; disini $2s = a + b + c$.

Untuk membuktikan dalil tersebut, digunakan dalil Pythagoras, yakni: pembuktian dengan langkah-langkah sebagai berikut.

Diketahui : ΔABC dengan sisi a, b, dan c

Akan dibuktikan: $L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Bukti:

Jika x sudut yang terbesar dalam ΔABC , maka dari A dibuat garis tinggi t_a . Garis tinggi ini terletak dalam segitiga, dan titik kakinya terletak antara B dan C. dengan menggunakan dalil Pythagoras didapat:

$$\sqrt{b^2 - t_a^2} - \sqrt{c^2 - t_a^2} = a ; \text{ Jadi } \sqrt{b^2 - t_a^2} = a - \sqrt{c^2 - t_a^2}$$

Setelah dikuadrat diperoleh:

$$b^2 - t_a^2 = a^2 + c^2 - t_a^2 - 2a\sqrt{c^2 - t_a^2}.$$

$$\text{Jadi } 2a\sqrt{c^2 - t_a^2} = a^2 - b^2 + c^2$$

Setelah dikuadratkan lagi diperoleh:

$$4a^2c^2 - 4a^2t_a^2 = (a^2 - b^2 + c^2)^2 \text{ atau karena } 2a t_a = 4L, \text{ maka}$$

$$16L^2 = 4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$$

Kedua ruas dari persamaan diuraikan, diperoleh:

$$[(a+c)^2 - b^2][(b^2 - (a-c)^2)] = (a+b+c)(a-b+c)(b-a+c)(b+a-c)$$

Karena $a+b+c = 2s$, maka $-a+b+c = 2(s-a)$ dan seterusnya.

Sehingga diperoleh : $16L^2 = 16s(s-a)(s-b)(s-c)$ dan terbukti yang akan dibuktikan.

Jika ruas kanan dari persamaan (1) dihitung, terdapatlah :

$$16L^2 = 2 \sum a^2b^2 - \sum a^4.$$

Bentuk ini juga berguna untuk menentukan, misalnya jika sisi-sisi ΔABC sama dengan $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$ dan $\sqrt{13}$. oleh karena $2L = a t_a$, maka dapat diperoleh :

$$\text{Dalam } \Delta ABC \text{ berlaku } t_a = \frac{2}{a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

KESIMPULAN

Dalil Pythagoras banyak digunakan dalam menyelesaikan problem matematika di Aljabar, Kalkulus, geometri, Trigonometri dan lainnya. Dalil Pythagoras pada awalnya adalah “dalam suatu segitiga siku-siku, jumlah luas dari masing-masing persegi yang terbentuk dari sisi-sisi yang saling tegak lurus sama dengan luas dari persegi yang terbentuk dari sisi miringnya”, namun pada tahap perkembangannya pada saat ini dalam dunia pendidikan dalil Pythagoras lebih dikenal adalah “untuk sebuah segitiga siku-siku (misalnya ΔACB), berlaku kuadrat hipotenusa sama dengan jumlah kuadrat kedua sisi

lainnya ($c^2 = a^2 + b^2$)". Perubahan ini disebabkan pada waktu zamannya Pythagoras masih hidup belum dikenal dengan adanya suatu bilangan rasional dan bilangan Irrasional, sehingga gambaran panjang suatu segmen garis hanya dapat digambarkan sebagai luas daerah secara geometri Euclides. Dalil Pythagoras sangat banyak manfaatnya dalam menyelesaikan problem matematika, salah satunya adalah dalam penemuan rumus untuk mencari luas suatu segitiga sembarang yang diketahui panjang sisi-sisi segitiganya.

DAFTAR PUSTAKA

- L.Kuipers, Wirasto. 1959. Planimetri. Noordhoff- Kolff N. V. Djakarta.
- Murtadho M, dkk. 1987. Pengajaran Matematika. UT. Karunika Jakarta.
- R.Soedjadi. 2000. Kiat Pendidikan Matematika Di Indonesia. Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi Departeman Pendidikan Nasional. Jakarta.

